

## 二维颗粒流从稀疏态到密集态的临界转变<sup>\*</sup>

钟 杰<sup>1)2)</sup> 彭 政<sup>1)</sup> 吴耀宇<sup>1)</sup> 史庆藩<sup>2)</sup> 陆坤权<sup>1)</sup> 厚美瑛<sup>1)†</sup>

1) (中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100080)

2) (北京理工大学应用物理系, 北京 100081)

(2006 年 3 月 7 日收到; 2006 年 7 月 20 日收到修改稿)

研究了斜槽中的二维颗粒流由稀疏到密集转变的临界现象. 在二维颗粒槽的入口流量  $Q_0$  和出口尺寸  $d$  固定的条件下, 记录并统计了稀疏流转变为密集流所经历的时间. 研究发现, 在统计时间内转变不发生的概率  $C(t)$  随时间指数衰减, 其衰减的特征时间尺度  $\tau^{-1}(d)$  可以很好地由幂律函数  $a(d_c - d)^{-\nu}$  来拟合, 其中  $d_c$  为临界开口尺寸. 此临界尺寸的存在确定了稀疏流到密集流转变的临界现象.

关键词: 颗粒物质, 颗粒流, 非平衡态相变, 几何相变

PACC: 8220M, 0570F, 4610

### 1. 引 言

颗粒物质在自然界中普遍存在, 但直到目前为止对颗粒物质的了解还相当有限. 颗粒物质具有许多独特的性质, 其中的相变现象也非常丰富.

非平衡相变往往是由大量分子自发组织起来集体运动的结果. 颗粒物质所表现出复杂的行为特性就强烈地依赖于大量颗粒间的力学相互作用. 颗粒间的基本相互作用是非弹性碰撞和摩擦. 前一种作用主要决定了能量在颗粒间的传递、耗散, 并对个体颗粒的运动方式产生影响; 而后一种作用使得颗粒趋向于整体运动, 消除个体颗粒之间的差异. 颗粒体系是能量耗散体系, 外界作用或颗粒运动能量会通过与其他颗粒的摩擦和碰撞而耗散, 因而在颗粒体系中发生的相变现象都是非平衡相变, 如沙堆崩塌现象<sup>[1]</sup>.

近年来, 颗粒流动的研究引发了广泛的兴趣, 成为当前物理学新兴的前沿课题之一<sup>[2-5]</sup>. 流动的颗粒物质通常具有稀疏、密集和阻塞三个状态. 针对颗粒物质流动各个状态的研究都取得了一些进展, 有的已经提出了可描述的状态方程<sup>[6]</sup>, 然而对于各个状态之间转变的研究还很有限. 由于颗粒在流动过程中密度和速度的分布都存在涨落, 而颗粒物质中

稀疏态到密集态以及密集态到阻塞态的转变又都是在接近临界以后由于颗粒流的涨落造成的, 因而这种状态之间的转变存在着一定的概率. 这个概率的大小会随着我们调节出口尺寸的大小以及延长观测转变的时间而变化. 转变概率的存在就意味着在研究颗粒物质各种状态之间的相互转变时需要回答一个无法回避的问题, 即稀疏态相对于密集态, 或者密集态相对于阻塞态究竟是不是一个真实存在的稳态? 如果这个转变概率随着延长观测时间和增大出口尺寸发生的变化很小或者只是很缓慢地衰减, 那么这种转变就很可能只是一种由暂态(亚稳态)趋向稳定态的转变. 亦即只要等待的时间足够长, 并且入口流量大于出口尺寸对应的密集流量, 那么稀疏流到密集流的转变就一定会发生, 尽管这种概率可能很小或者等待的时间很长(本文仅讨论稀疏流到密集流的转变问题, 密集流到阻塞的转变参见文献[7]). 此外, 在我们以前研究稀疏流到密集流转变的实验中<sup>[8]</sup>, 选取观测稀疏流到密集流转变的时间尺度是 15 s, 如果稀疏流只是密集流的一个暂态(亚稳态), 那么延长观测时间将会得到不同的稀疏流转变为密集流的临界出口尺寸, 这也就意味着真实唯一的临界出口尺寸可能不存在. 为了回答颗粒的稀疏流究竟是不是密集流的暂态(亚稳态)这一关键的问题, 我们特意设计了下面的实验, 通过统计二维颗粒

<sup>\*</sup>国家自然科学基金(批准号:A0402-10274098, 10474124)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

流从稀疏流转变到密集流历经时间的分布随出口尺寸的变化关系,来研究当观测时间趋向无穷长时临界的出口尺寸  $d_c$  是否依然存在.

## 2. 颗粒流的状态转变

颗粒物质的流动通常有稀疏、密集和堵塞三个状态.若颗粒物质在流动时,大多数的颗粒互不接触,即使出现碰撞接触也以两体碰撞为主,则颗粒流处于稀疏状态,其流量  $Q$  与颗粒密度、速度  $v$  和截面积  $S$  成正比,即  $Q = vS$ .对于槽流,稀疏流的入口流量等于出口流量,即在槽中不会有颗粒的堆积.而当颗粒流处于密集状态时,颗粒之间以多体碰撞为主,由于颗粒之间以及颗粒与器壁之间的摩擦及互相碰撞,颗粒在运动时有能量的转换和损失从而影响流动,使问题变得复杂.此时对于出口尺寸固定的槽流,出口的颗粒流量仅仅与出口的尺寸相关而与入口流量无关,颗粒在槽中出现堆积.而当槽的出口尺寸减小到约 4 个颗粒直径的尺度时,颗粒流将被完全阻塞,流动停止.阻塞是由于颗粒成拱造成的.颗粒在密集流动状态时,由于多体作用力链结构会变化并形成颗粒拱.颗粒拱在形成以后可能会破裂,颗粒继续流动;也可能不破裂,则发生阻塞.颗粒物质稀疏、密集和阻塞的三种状态可以通过槽流或管流中调节出口尺寸或入口流量的大小分别得到.图 1 给出了颗粒槽流的出口流量  $Q$  随入口流量  $Q_0$  和出口尺寸  $d$  的变化而变化的关系,这种变化关系反映了颗粒流由稀疏态转变为密集态和由密集态转变为阻塞态的特性.

最近 To 等<sup>[9]</sup>和 Zuriguel 等<sup>[10]</sup>分别对二维和三维阻塞现象作了大量的研究,得到了颗粒流中阻塞发生的概率函数. Zuriguel 等在对三维圆筒阻塞现象的研究时发现存在一个临界的出口尺寸,当出口大于此尺寸时,颗粒流不再发生阻塞,颗粒流从密集态到阻塞态的转变仅仅与通道的出口尺寸有关.而我们以前的工作<sup>[11]</sup>在研究二维颗粒流从稀疏流到密集流的转变现象时发现当初始入口颗粒流量固定,槽出口的尺寸减小到某一临界值时,或当槽出口的尺寸固定,入口颗粒流量增大到某一临界值时,都会发生出口流量的突然减小,即颗粒流从稳定的稀疏流转变为稳定的密集流,如图 2 所示.而且颗粒流从稀疏态到密集态的转变不仅与通道的出口尺寸相关还与通道自身的几何尺寸相关.这种在固定的入口

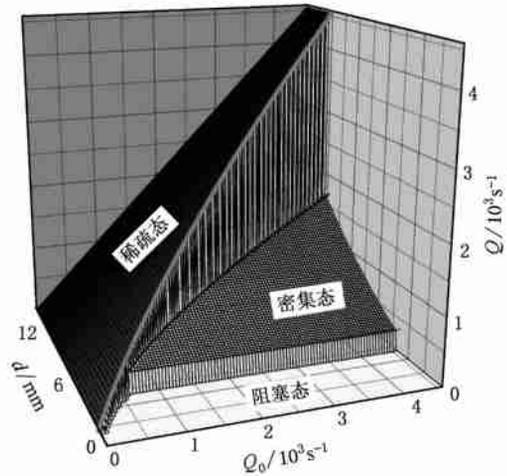


图 1 二维颗粒流实验的相图

流量和出口尺寸的条件下,仅仅由于流动过程中的涨落而导致出口流量急剧变化,颗粒流从一种稳定的流量(稀疏流量)突变到另一种稳定的流量(密集流量)的特性与一般流体运动有很大的不同.但是这一规律对所有离散态物质流动(如人流、交通流、浮冰流以及工农业生产中的离散物料输运等<sup>[11-13]</sup>)具有普适性.

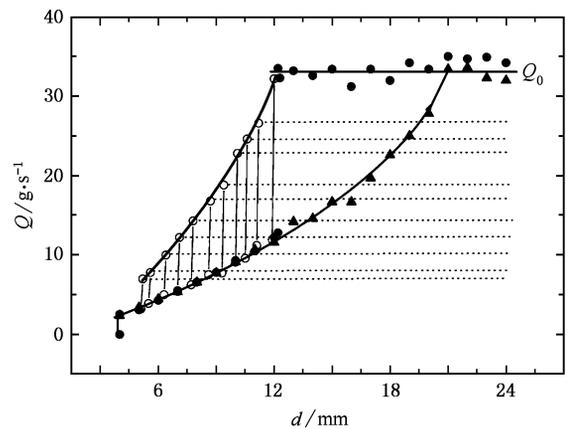


图 2 入口流量  $Q_0$  固定时,出口流量  $Q$  随出口尺寸  $d$  的变化

## 3. 实验装置和实验方法

实验装置如图 3 所示,其中二维流动槽斜面的最上面一层是光滑的玻璃平板.为了降低静电对实验的影响,采用光滑的钢板作为底层.斜面倾斜角度约为  $20^\circ$ ,总长 2.0 m,主要分为两部分,上方为存储钢珠的储料仓,下方为二维漏斗型流动槽.槽宽为

60 mm,总长为 570 mm,漏斗以下的流动区域长 380 mm. 实验颗粒选取的是直径为 2 mm 的光滑钢珠,为了保证颗粒的单层流动,上下两层之间的间隙取为 2.2 mm. 如图 3 所示,在漏斗处有一挡板,用于调节颗粒流初始流量. 通道底部安置连续可调的出口,调节精度为 0.02 mm,出口尺寸为  $d$ . 出口下方放置一个传感器,用于测量从出口流出颗粒的累积质量,累积质量随时间的变化率就是出口流量. 传感器的测量精度为 0.02 g,每秒记录 10 次数据.

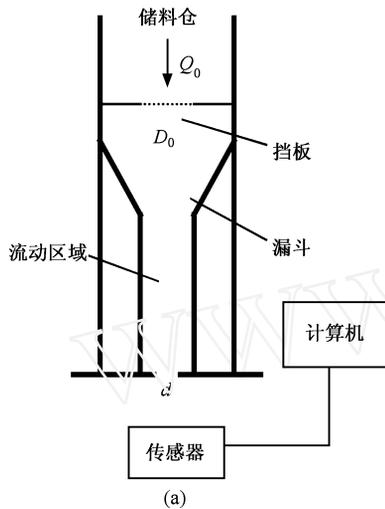


图 3 实验装置示意图 (a)俯视图, (b)侧视图

本实验采用的入口流量是恒定的,我们通过调节和控制储料仓的出口尺寸来得到稳定的入口流量,将入口流量(质量流率)控制在  $34.4 \pm 0.4$  g/s(入口尺寸  $D_0 = 26$  mm). 颗粒的出口流量由出口尺寸  $d$  来控制,在取定一个出口尺寸  $d$  之后,打开控制挡板. 流动的初始状态为稀疏流,此时入口流量与出口流量一致,用电子天平记录流出的颗粒累积质量  $M(t)$  并由此计算出口流量. 在保证入口流量稳定的前提下,测量并记录每次颗粒流由稀疏流向密集流转变所需要的时间,即转变时间. 出口尺寸从 19.0 mm 取到 19.7 mm(当出口尺寸小于 19.0 mm 时,转变几乎在达到稳定稀疏流之间已经发生;而当出口尺寸大于 19.7 mm 时,等待 1 h 以上仍然不能观测

到转变), 每个出口尺寸的间隔为 0.1 mm, 在每个出口尺寸下,对转变时间的测量次数为 1000 次左右.

### 4. 实验结果及讨论

图 4 显示的是开口尺寸为 19.6 mm 时,稀疏流到密集流在  $t$  时刻发生转变的转变次数  $f(t)$  随时间分布的直方图. 在最初若干秒钟后,流动达到稳定状态,  $f(t)$  随着时间的增加呈现指数衰减的形式.

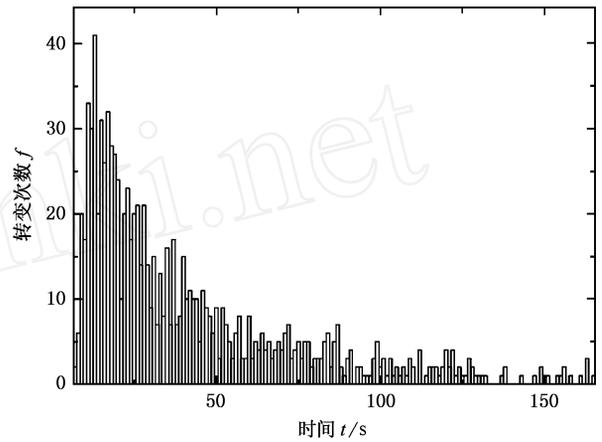


图 4 转变次数  $f$  随时间  $t$  分布的直方图  $d = 19.6$  mm

设  $F(t_0)$  为  $t = t_0$  时所有的转变次数与总测量次数的比值,

$$F(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{t=t_0} f(t). \tag{1}$$

我们还可以定义  $C(t_0)$  为  $t = t_0$  时颗粒流仍然为稀疏状态的概率,即  $C(t_0) = 1 - F(t_0)$ . 图 5 所示为概

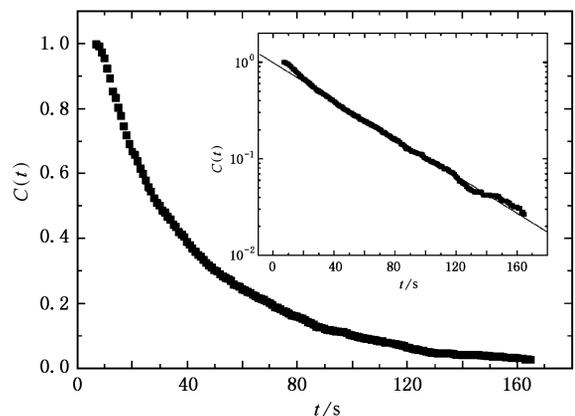


图 5 颗粒维持稀疏流的概率分布函数  $C(t)$  随时间  $t$  的变化关系 内插图中表明  $C(t)$  随着  $t$  的增大呈指数衰减

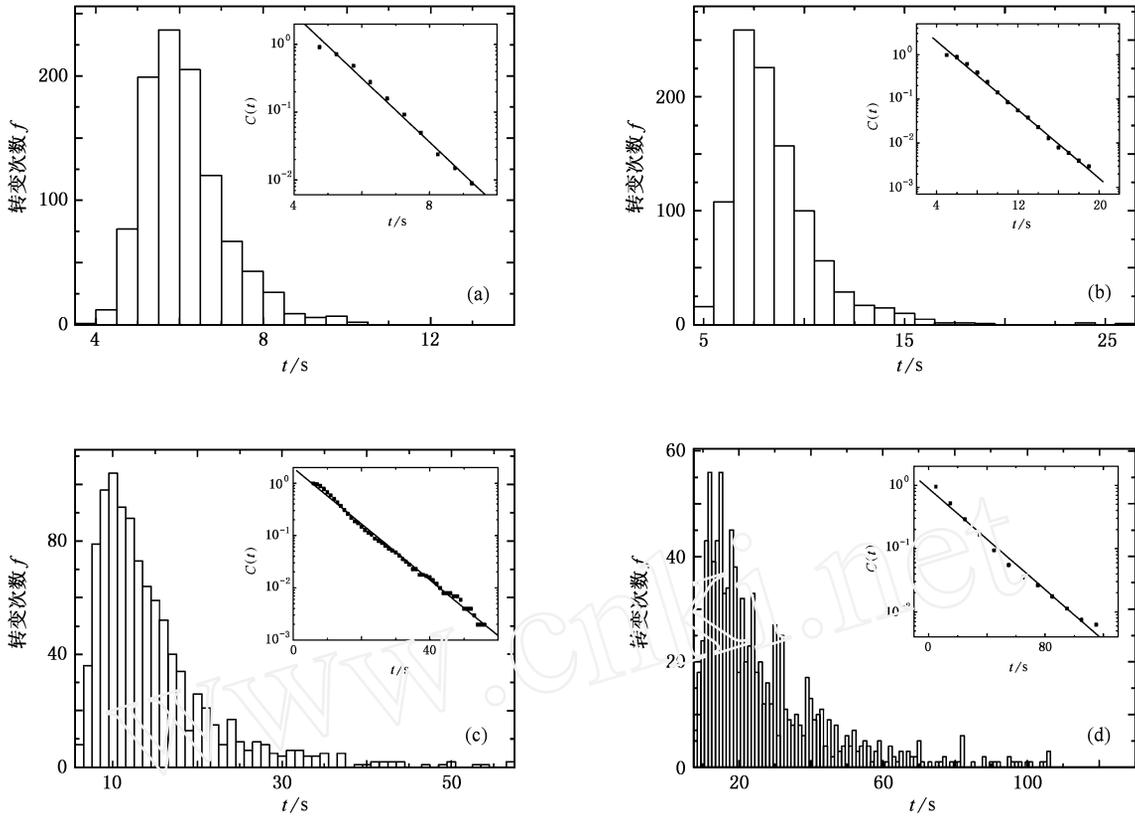


图 6 不同开口尺寸下的转变次数  $f(t)$  的直方图及相应的  $C(t)$  (内插图) (a), (b), (c), (d) 分别对应开口尺寸  $d = 19.0, 19.2, 19.3, 19.4$  mm

率分布函数  $C(t)$  以及对其取半对数坐标后的线性形式, 显见  $C(t)$  是时间  $t$  的指数函数.

$$C(t) = 1 - F(t) = \exp[-(t - t_1)] \quad (2)$$

这里,  $\tau^{-1}$  是流动维持稀疏状态的特征时间,  $t_1$  是系统达到稳定流动所需的时间.

图 6 给出了  $d = 19.0, 19.2, 19.3, 19.4$  mm 四个出口尺寸下  $f(t)$  的直方图及对相应的  $C(t)$  取半对数坐标后的曲线. 由实验所得各个出口尺寸  $d$  下的特征时间  $\tau^{-1}$  如图 7 所示. 假设存在一个临界出口尺寸  $d_c$ , 当出口尺寸大于此值时转变不再发生, 特征时间  $\tau^{-1}$  可以很好地由函数  $a(d_c - d)^{-1}$  来拟合, 其中  $a = 2.3 \pm 0.5$ ,  $\tau_c = 1.8 \pm 0.2$ ,  $d_c = 19.73 \pm 0.09$  mm. 这显示了临界出口尺寸  $d_c$  的存在, 当开口大于此值时, 稀疏流将永远保持稀疏状态, 转变不可能发生. 考虑到系统最小的特征尺度是颗粒尺寸  $d_0$ , 若以  $d_0$  为长度单位, 我们发现在出口尺寸改变仅  $0.2 d_0$  的情况下, 流动维持稀疏态的特征时间(即转变发生需要的特征等待时间)增大超过了两个数

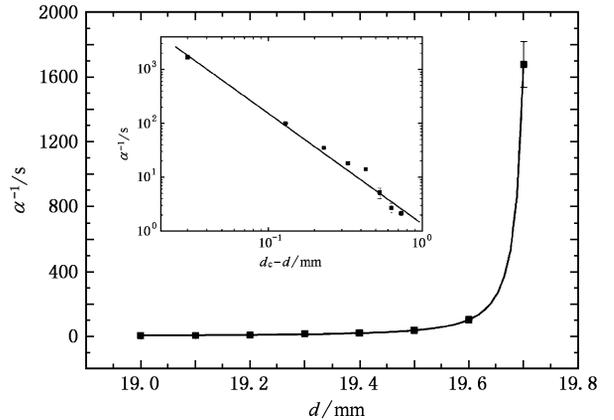


图 7 流动维持稀疏状态的特征时间  $\tau^{-1}$  随出口尺寸  $d$  的变化关系 图中实线是用公式  $a(d_c - d)^{-1}$  拟合的结果. 内插图是双对数坐标下  $\tau^{-1}$  随  $(d_c - d)$  的变化曲线, 其中  $d_c$  为由拟合得到的参数. 此曲线近似为线性说明我们采用的拟合公式和拟合结果是可靠的. 内插图中的实线是用于标示的参考线

量级. 因此, 实验观察时间虽然远小于  $t = \tau$ , 但所测量的转变出口尺寸在实验误差范围内仍然与真实临界尺寸  $d_c$  相近. 实验中还发现, 临界出口尺寸  $d_c$

(约为 19.73 mm) 远小于控制入口流量的入口尺寸  $D_0$  (26mm), 这表明转变发生时的临界入口流量  $Q_c$  远大于密集流量  $Q_d$ . 证明了稀疏流不是一个只要入口流量略大于出口尺寸对应的密集流量就最终会转变为密集流的暂态(亚稳态), 亦即颗粒流确实存在三个稳定态: 稀疏态(快速流区)、密集态(慢速流区)和阻塞态.

## 5. 结 论

我们通过测量在固定入口流量和出口尺寸下的稀疏流到密集流转变等待时间的统计分布, 考察了稀疏流到密集流转变的临界性质, 发现维持稀疏流的概率函数随着时间的增长呈现指数衰减形式. 其衰减的特征时间  $\tau^{-1}$  随着出口尺寸  $d$  的增大而增长,

且可以由幂律函数  $a(d_c - d)^{-\gamma}$  很好地拟合, 表明临界开口尺寸  $d_c$  的存在. 实验同时发现, 在临界尺寸附近等待时间增长两个数量级时, 实验确定的临界出口尺寸与真实的临界出口尺寸之差不到单个颗粒尺寸的  $2/10$ . 由此我们可以确定实验的 15 s 观察时间所确定的临界出口尺寸<sup>[8]</sup>在实验误差范围内与真实临界出口尺寸等同. 本文的实验结果证明了稀疏流并非是一种暂态(亚稳态), 而且存在一个与测量时间无关的临界出口尺寸. 对应此出口尺寸, 给定了几何尺寸的稀疏流存在一个最大的临界流量, 入口流量一旦达到这一流量值, 稀疏流到密集流的转变就会发生.

作者钟杰感谢杜其永教授有益的讨论和张彤老师以及刘锐、马成龙同学在实验上的帮助.

- 
- [1] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 381
- [2] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [3] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [4] Bao D S, Zhou Y, Zhang X S *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1279 (in Chinese) [鲍德松、周 英、张训生等 2005 物理学报 **54** 1279]
- [5] Hu M B, Wu Q S, Kong X Z *et al* 2005 *Chin. Sci. Bull.* **50** 1567 (in Chinese) [胡茂彬、吴清松、孔祥照等 2005 科学通报 **50** 1567]
- [6] Aranson I S, Tsimring L S 2004 *The Physics of Granular Media* (Weinheim: Wiley-VCH) p143
- [7] To K 2005 *Phys. Rev. E* **71** 060301
- [8] Hou M, Chen W, Zhang T *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 204301
- [9] To K, Lai P Y, Pak H K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 71
- [10] Zuriguel I, Pugnali L A, Garcimartin A *et al* 2003 *Phys. Rev. E* **65** 030301
- [11] Helbing D, Herrmann H J, Schreckenberg M *et al* 1999 *Traffic and Granular Flow* (Singapore: Springer)
- [12] Rajchenbach J 2000 *Adv. Phys.* **49** 229
- [13] Shen H T, Lu S 1996 *Proc. Int. Conf. Cold Regions Engineering* (Fairbanks: ASCE) pp 594 - 605

# The critical phenomena of the dilute-to-dense transition in two-dimensional granular flow<sup>\*</sup>

Zhong Jie<sup>1)2)</sup> Peng Zheng<sup>1)</sup> Wu Yao-Yu<sup>1)</sup> Shi Qing-Fan<sup>2)</sup> Lu Kun-Quan<sup>1)</sup> Hou Mei-Ying<sup>1)†</sup>

1) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics,*

*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)*

2) (*Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)*

(Received 7 March 2006; revised manuscript received 20 July 2006)

## Abstract

The criticality of the dilute-to-dense transition in an inclined two-dimensional (2D) granular channel flow is investigated. The waiting time  $t$  before the transition occurs and after the flow is initiated is recorded. It is found that the probability function  $C(t)$  for the flow remaining dilute at time  $t$  decays exponentially with a characteristic time  $\tau^{-1}(d)$ . The characteristic time is found to be fitted well by a power law  $a(d_c - d)^{-\alpha}$ , where  $d_c$  is the critical opening size: as for  $d > d_c$ , the transition will never happen. The existence of a critical opening size at the exit confirms that the dilute-to-dense transition in 2D granular flow is a critical transition.

**Keywords:** granular matter, granular flow, non-equilibrium phase transition, geometric phase transition

**PACC:** 8220M, 0570F, 4610

<sup>\*</sup>Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. A0402-10274098, 10474124).

<sup>†</sup>E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn