

重力驱动下运动物体在颗粒介质中的最大穿透深度*

张权义¹⁾²⁾ 吴耀宇¹⁾ 彭 政¹⁾ 刘 锐¹⁾ 陆坤权¹⁾ 厚美瑛^{1)†}

1) 中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100080)

2) 铜仁学院物理系, 铜仁 554300)

(2006 年 6 月 15 日收到, 2006 年 8 月 8 日收到修改稿)

通过高速摄像的跟踪, 研究了重力场中球形下落物体对松散颗粒床进行撞击并进入颗粒床内的运动过程. 运用已得到的颗粒体系中运动物体的阻力模型, 分析了物体质量对穿透深度的影响. 研究表明, 当物体与颗粒床撞击的初始速度较小时, 物体在颗粒床中的最大穿透深度与物体质量呈近似线性关系. 实验得到的结果与模型符合很好.

关键词: 颗粒体系, 阻力, 动力学过程

PACC: 0320, 4610

1. 引 言

颗粒体系是一种离散的非平衡态能量耗散体系^[1-4]. 一个物体在重力作用下从一定高度 H 自由下落并以某一速度坠入颗粒床中, 物体在颗粒床中所受的平均阻力 F_s 可以由它的穿透深度 d 得出, $F_s = mgH/d$. 地质学家从陨石撞击地球所留下的坑洞的形貌与深度可以推断出撞击的力学过程^[5,6]. 在实验室的颗粒床中可以重复类似于陨石的撞击过程, 进而直观地重现撞击的动力学过程. 我们的实验可以观察到物体的撞击会使被撞的松散颗粒产生类似液体的运动, 此时物体的穿透深度可能大于下落的高度, 并使颗粒产生喷流现象^[7,8]. 颗粒床对于运动物体的阻力类似于流体, 但又不同于流体. 流体对于运动物体的平均阻力 F_s 可由浮力与黏性阻力之和得到. 然而由于颗粒介质力链结构的非均匀分布, 对于颗粒介质的阻力描述要复杂得多.

最近几年, 对颗粒床的静态性质与颗粒的力链结构关系开始有了较深入、较系统的研究与报道^[9]. 颗粒床中应力的分布与传播在不同的系统尺度上表现出不同的宏观效应, 并随系统的无序程度以及颗粒的粗糙程度变化. 物体在颗粒介质中缓慢匀速运动(小于 5 mm/s)时受到的阻力与颗粒体系中的力

链结构的重组有关^[10], 此时阻力的大小与运动的速度关系不大. 当物体在重力作用下穿入松散的颗粒介质的速度达到 1 m/s 的量级时, 力链的动力学响应会决定球在穿入过程中所受到的力, 然而这种动力学现象是否能与流体类比仍不清楚. 最近, Giamarra 研究组^[11]和 Lohse 研究组^[8]分别对准二维和三维颗粒床进行了动态特性的实验研究. 在三维的松散颗粒床中^[8](堆积分数为 41%), 以静止于床表面($H = 0$)的球落入颗粒体系的实验, 发现阻力 F_s 可以用静压力 κz 来描述(κ 为阻力系数, z 为进入的深度). 实验还发现, 球的最终穿透深度与球的质量成正比. 在准二维颗粒床中^[11], 实验发现阻力正比于初速度 u_0 . 为了探索颗粒介质中的阻力形式, 在我们先前的研究中, 以不同初始速度的球(圆柱)撞击三维(二维)颗粒床^[7,12], 发现物体的穿透速度 u 可以用

$$m \frac{du}{dt} = -\gamma u - \kappa z + mg'$$

来描述. 这里, γ 和 κ 分别是表征颗粒床的黏性阻力系数和静压阻力系数, z 是物体的穿透深度, $g' = g - f/m$, 其中 f 是颗粒体系所独有的等效摩擦力. 我们发现黏性阻力项在二维实验中起着重要作用, 但是在三维实验中静压力项起主要作用. 本文将在我们以前工作的基础上进一步研究三维颗粒床中物体的最终穿透深度与其质量之间的关系.

* 国家自然科学基金(批准号: A0402-10474124)资助的课题.

† E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

2. 实验装置及实验方法

实验中颗粒床由一个装满空心漂珠、高为 25 cm、直径为 19.6 cm 的圆柱形容器制备而成。颗粒是直径为 74—100 μm 、平均密度为 0.693 g/cm^3 的空心漂珠。撞击物选用了直径为 1.5 cm 的 7 个空心铜球, 内部填充不等量的锡, 使得其质量不等, 分别为 4.9 5.9 6.9 7.9 8.9 9.9 和 10.9 g。当球在三维的颗粒床中运动时, 无法直接观察到球的运动情况。为此, 我们在每个球上粘了一根细金属丝(直径为 0.5 mm, 长为 26 cm, 质量为 0.4 g)作为球的位置标记, 如图 1 所示。

为保证每次实验中颗粒床的实验条件尽可能相同, 我们采用以下方法: 先在床的底部放一个筛孔为 0.4 mm 的筛子, 然后倒入漂珠, 再慢慢将筛子从床的底部拉出, 使床中的颗粒足够松散, 最后刮平颗粒

床表面。用这种方法制备的颗粒床的颗粒体积分数大约为 54%。

在实验中, 用细棉线系住金属丝, 将球悬挂在距颗粒床表面不同高度以便获得不同的撞击初速度, 然后用火烧断细线, 使球在重力作用下自由下落。用每秒 868 帧的高速摄像, 记录下落球从开始撞击颗粒床到完全停止的整个穿通过程, 并对每个下落高度都进行至少 5 次的重复实验。

图 1 为实验过程中通过高速摄像拍摄的其中 3 帧照片: 下落过程中的球, 球在下落过程中与颗粒床表面碰撞瞬间, 球进入颗粒床最后静止时。由图 1 可见, 通过尾部的标记与刻度尺便可以准确地得出球在床中的位置。

由高速摄像的方法可得到每一个球的穿透位置(深度) z 与时间 t 的关系曲线, 再对其进行微分即得到穿透速度 u 与时间 t 的关系曲线, 从而可以进一步分析球的受力情况。

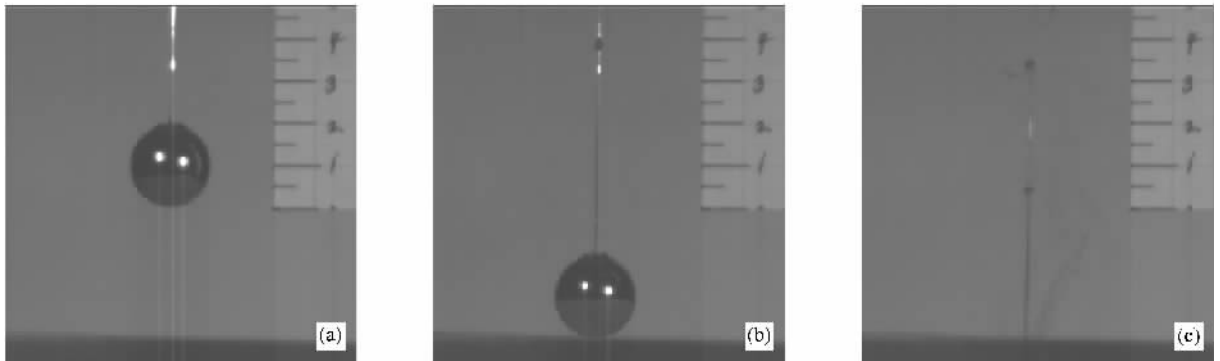


图 1 高速摄像拍摄的球下落照片 (a)下落过程中的球 (b)球与颗粒床表面接触 (c)球进入颗粒床以后

3. 实验结果及讨论

图 2 所示为由一个质量为 11.3 g (包含尾部细金属丝的质量) 铜壳球以不同的初速度 u_0 撞击颗粒床后在颗粒床中的穿透深度 z 与时间 t 的关系。图 2 中的 u_0 值是由球的下落高度计算得出的, 并与高速摄像读取的球的初速度进行了比较, 结果符合得非常好。

对图 2 中的穿透深度 z 随时间 t 的变化关系曲线进行微分后就得到了球的穿透速度 u 随时间 t 的变化关系。

图 3 为速度随时间的变化关系。从图 3 可以看到, u 随 t 的变化是非线性的。实际上, $u(t)$ 曲线的形状基本都是上凸的, 即

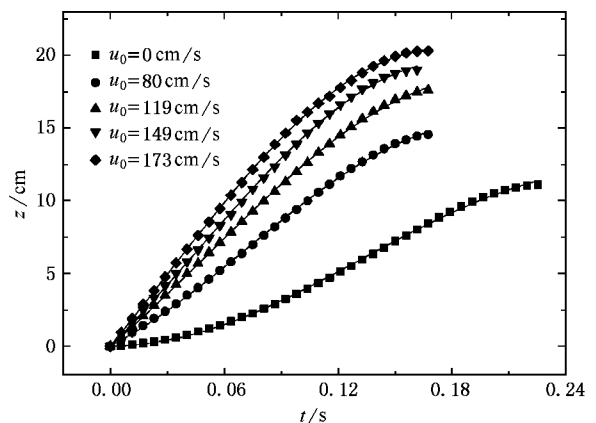


图 2 $m = 11.3 \text{ g}$ 的球穿透深度 z 随时间 t 的变化关系 图中实线为由(1)式得到的拟合曲线

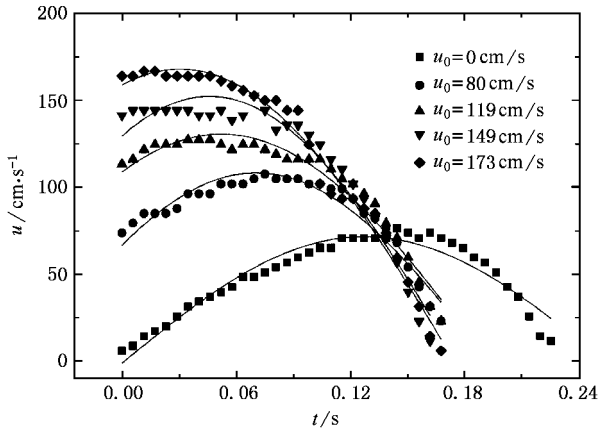


图3 速度 u 随时间 t 的变化关系 实线为(2)式的拟合曲线

$$\frac{d^2 u}{dt^2} < 0.$$

因为 du/dt 是与作用在球上的力成比例的,而阻力的方向为负,这表明阻力是随着时间 t 增加的.而在物体进入颗粒介质直到停止的运动过程中,速度 u 最终是随着时间减小的,只有深度 z 会随着时间的增加而增加,故阻力主要是随着深度增加而增加的.在三维颗粒床中,球的运动方程可以表示为

$$m \frac{du}{dt} = -\kappa z - f + mg.$$

解此微分方程得到初条件为 $z(0) = 0$ 和 $u(0) = u'_0$ 的球下落深度的解

$$z(t) = -\frac{mg'}{\kappa} \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \frac{u'_0}{\sqrt{\kappa/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \frac{mg'}{\kappa}. \quad (1)$$

由(1)式可得到球的速度

$$u(t) = \frac{g'}{\sqrt{\kappa/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - u'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right). \quad (2)$$

这里 $g' = g - f/m$, u'_0 为不考虑撞击过程的能量损耗所得的球的初速度^[2], κ 为静压阻力系数, f 为等效摩擦力. 以 u'_0 , κ 和 f 为参量可以很好地拟合我们的实验数据(图2、图3中的实线). 这说明我们对三维颗粒介质中阻力形式的分析是合理的.

文献8指出,球以 $u_0 = 0$ 的初速度在松散三维颗粒介质中穿行的最终穿透深度近似正比于球的质量. 为验证下沉深度与球质量之间的关系,我们系统地测量了不同初速度、不同质量的球在颗粒床中的穿透深度. 图4所示为不同初速度的球在颗粒床中的最大穿透深度 z_{\max} 随质量 m 的变化关系,可以发现与文献8中描述的零初速情形类似,当 $u_0 > 0$

时,球的最终穿透深度与球的质量同样近似为线性关系.

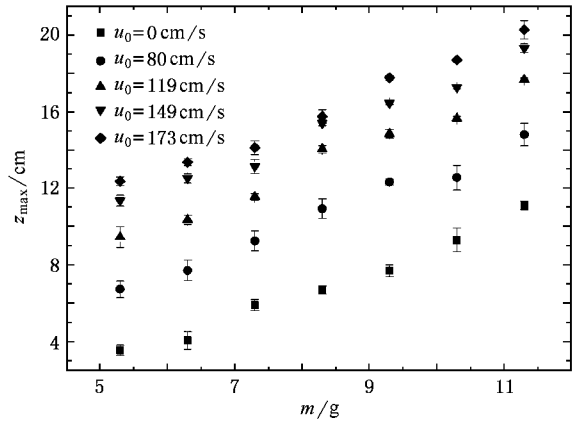


图4 物体质量 m 与最大穿透深度 z_{\max} 的关系

由(1)式可以得到最大穿透深度 z_{\max} 与运动物体质量 m 的关系式

$$z_{\max} = \frac{m}{\kappa} \left[\sqrt{\left(g - \frac{f}{m}\right)^2 + \frac{\kappa u_0^2}{m}} + \left(g - \frac{f}{m}\right) \right]. \quad (3)$$

由于 z_{\max} 与 m 的关系受到初始速度 u_0 的影响,下面分三种情况进行讨论.

1) 当 $u_0 = 0$ 时. 若 $f > mg$, 则 $z_{\max} = 0$, 相当于球完全无法进入颗粒床内部. 若 $f < mg$, 则

$$z_{\max} = \frac{2m}{\kappa} \left(g - \frac{f}{m}\right) = \frac{\chi}{\kappa} (mg - f). \quad (4)$$

显然,不论球的质量多大,只要球能够进入颗粒床内部,最终的穿透深度与球的质量呈线性关系. 这与 Lohse 等^[8]报道的零初速度观察结果一致.

2) 当 u_0 较小时. 若

$$\frac{\kappa u_0^2}{m} \ll \left(g - \frac{f}{m}\right)^2,$$

类似于上述 $u_0 = 0$ 的情况,

$$z_{\max} \approx \frac{2m}{\kappa} \left(g - \frac{f}{m}\right) = \frac{\chi}{\kappa} (mg - f).$$

这与图4的结果相符,球的最终穿透深度仍然近似正比于球的质量.

3) 当 u_0 较大时. 若 m 不是很大,即

$$\frac{\kappa u_0^2}{m} \gg \left(g - \frac{f}{m}\right)^2,$$

则

$$z_{\max} \propto \sqrt{m}.$$

若 m 很大,即

$$\frac{\kappa u_0^2}{m} \ll g^2 \left(\approx \left(g - \frac{f}{m} \right)^2 \right),$$

则

$$z_{\max} \propto m.$$

采用文献 [12] 所得的特征值 $\kappa = 0.01 \text{ N/cm}$ 和 $f = 0.05 \text{ N}$, 图 5 给出以上所讨论不同的 u_0 下外推得到 z_{\max} 随质量 m 的变化曲线. 由图 5 可以看出, 对于本文中中小于 200 cm/s 的初速度, 球的最大穿透

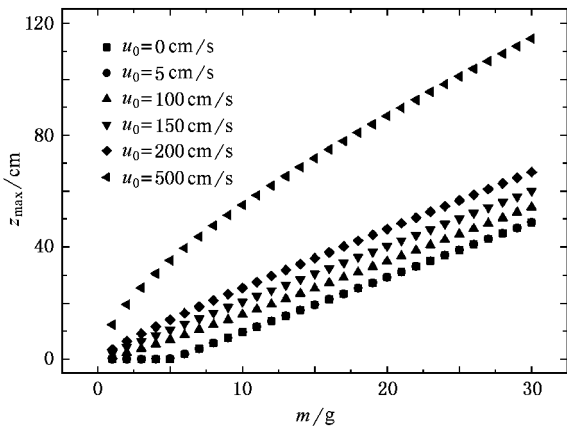


图 5 由 z_{\max} 的表达式外推得到的不同 u_0 下 z_{\max} 随 m 的变化关系

深度 z_{\max} 与球质量 m 近似为线性. 而当初速度达到 500 cm/s 时, 这种线性关系将会开始发生偏离. 可以预期随着初速度的进一步增大, z_{\max} 将会随着 m 的平方根增长, 但在 m 足够大时, z_{\max} 又将会随着 m 线性增长.

当然, 我们在这里讨论的深度仅限于干的颗粒系统. 对于如河里的流沙等湿颗粒体系, 由于液体黏滞性的影响, 下沉深度将主要与物体的剪切应力相关 [13].

4. 结 论

本文通过系统的实验测量得到重力场作用下自由下落物体撞击并穿透松散三维颗粒床的穿透深度与下落物体质量之间的关系, 说明了物体在颗粒床中的阻力形式为 $m \frac{du}{dt} = -\kappa z - f + mg$. 实验发现, 物体在颗粒介质中的最大穿透深度与物体的质量呈线性增长关系. 这一关系不仅对初速度为零的情况成立, 而且对于初速度不是太大的情况也近似地成立.

感谢张彤老师在实验上提供的帮助.

- [1] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [2] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [3] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉、刘新影、彭雅晶等 2005 物理学报 **54** 5692]
- [4] Hu M B, Kong X Z, Wu Q S *et al* 2005 *Chin. Phys.* **14** 1844
- [5] Uehara J S, Ambroso M A, Ojha R P *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 194301
- [6] Walsh A M, Holloway K E, Habdas P *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 104301
- [7] Hou M Y, Peng Z, Liu R *et al* 2005 *Sci. Techn. Adv. Mat.* **6** 855
- [8] Lohse D, Rauhe R, Bergmann R *et al* 2004 *Nature* **432** 689
- [9] Luding S 2005 *Nature* **435** 159
- [10] Albert R, Pfeifer M A, Barabasi A L *et al* 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 205
- [11] Ciamarra M P, Lara A H, Lee A T *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 194301
- [12] Hou M Y, Peng Z, Liu R *et al* 2005 *Phys. Rev. E* **72** 062301
- [13] Khaldoun A, Eiser E, Wegdam G H *et al* 2005 *Nature* **437** 635

The sinking depth of a projectile in granular media under gravity^{*}

Zhang Quan-Yi^{1,2)} Wu Yao-Yu¹⁾ Peng Zheng¹⁾ Liu Rui¹⁾ Lu Kun-Quan¹⁾ Hou Mei-Ying^{1)†}

¹ *Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

² *Department of Physics, Tongren Institute, Tongren 554300, China*

(Received 15 June 2006 ; revised manuscript received 8 August 2006)

Abstract

The process of impact and penetration of a projectile with velocity u_0 in a fine, loose granular system under acceleration due to gravity has been recorded experimentally by using fast video photography. The measured penetration depth as a function of the projectile mass agrees with the prediction of our previous drag force model in that at low impact velocity the penetration depth is linearly proportional to the mass of the projectile.

Keywords : granular systems, drag force, dynamical processes

PACC : 0320, 4610

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. A0402-10474124).

[†] E-mail : mayhou@aphy.iphy.ac.cn