

# 运动物体在颗粒介质中的阻力形式<sup>\*</sup>

张权义<sup>1,2)</sup> 彭 政<sup>1,3)</sup> 何 润<sup>1)</sup> 刘 锐<sup>1)</sup> 陆坤权<sup>1)</sup> 厚美瑛<sup>1)†</sup>

1) 中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100080)

2) 铜仁学院物理系, 铜仁 554300)

3) 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

(2007 年 3 月 19 日收到, 2007 年 6 月 15 日收到修改稿)

物体由重力驱动在颗粒介质中的运动过程, 从动力学上可以用等效重力、颗粒床的黏性阻力及静压阻力来描述. 通过求解此动力学模型, 找到了一个能够控制颗粒系统处于不同阻尼状态的参量  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  的表达式直接反映了黏性阻力项和静压阻力项的竞争. 这种竞争使得颗粒介质能够处于不同阻尼状态, 表现出不同的表观阻力行为. 根据理论分析结果设计实验, 实现了对颗粒介质体系阻尼状态的调节, 验证了理论模型给出的运动物体在颗粒介质中受到的阻力形式.

关键词: 颗粒体系, 阻力, 动力学过程

PACC: 4610, 0320

## 1. 引 言

颗粒介质作为一个复杂的非线性体系, 其内部不均匀分布的力链结构使其能够表现出许多不同于通常固体和液体的奇特性质<sup>[1-6]</sup>. 当物体在颗粒介质中运动时, 需要破坏颗粒介质内部的力链结构才能够前进, 这对于运动物体而言就表现为阻力. 因此研究运动物体在颗粒介质中受到的阻力, 可以间接地反映颗粒系统内部力链结构及其对外力的响应, 这是研究颗粒介质体系力学性质的一个重要途径和方法.

在流体中慢速运动的球形物体, Stokes 定律给出其受到的黏性阻力为  $f = 6\pi a\eta v$  ( $a$  和  $v$  分别是物体的半径和运动速度,  $\eta$  是流体的黏滞系数), 这个与速度相关的黏性阻力是物体在流体中运动时所受阻力的主要来源. 然而对于物体在流化的颗粒介质中运动时所受到的阻力, 其形式中是否也存在与流体中相似的与速度相关的黏性项, 仍然是一个有争议的问题. 近年来不同的研究小组给出了不同的实验研究结果<sup>[7, 8]</sup>. 文献 [7] 研究了物体在重力作用下以一定初速度  $u_0$  撞击并穿透二维颗粒介质的过程, 发现物体受到的阻力  $f$  正比于  $u_0$ . 而文献 [8] 的研究

则发现在松散的三维颗粒床中, 由重力驱动以初速度  $u_0 = 0$  坠入的物体, 在运动过程中受到的阻力可以用静压阻力  $\kappa z$  来描述 ( $\kappa$  是阻力系数,  $z$  是物体在颗粒介质中的穿透深度). 为了解决这一矛盾, 探索被外物撞击、侵入而流化的颗粒介质对侵入物的阻力形式, 我们研究了不同初速的物体对准二维 [与文献 [7] 中严格意义上的二维实验的不同之处将在后面实验部分详细说明] 和三维颗粒介质的撞击并侵入的过程<sup>[9, 10]</sup>, 发现在准二维实验中物体运动的减速度随  $t$  减小, 而在三维实验中其减速度随时间变大, 体现出了不同的表观阻力形式, 分别类似于文献 [7] 中的二维实验结果和文献 [8] 中的三维实验结果. 通过分析认为, 物体在颗粒介质内部运动时, 同时受到黏性阻力  $\gamma u$  ( $u$  是物体的运动速度) 和静压阻力  $\kappa z$  的阻滞作用, 在二维和准二维实验中黏性阻力项起主要作用, 而在三维的实验中静压阻力项占主导地位, 从而导致了不同的速度衰减趋势.

本文在已有研究工作<sup>[9-11]</sup>的基础上, 进一步探究和验证物体在颗粒介质中运动的阻力形式. 通过分析和解析求解已建立的阻力模型, 找到了一个能够控制颗粒系统处于不同阻尼状态的参量  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  的表达式直接反映了黏性项和静压项的竞争, 这种竞争是颗粒系统能够处于不同阻尼状态, 表现出不同

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10474124)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: mayhou@aphy.iphys.ac.cn

表观阻力行为的根本原因,解释了运动物体在二维及准二维颗粒介质和三维颗粒介质中所受阻力形式不同这一现象.同时通过设计实验,根据控制参量  $\Gamma$  来调节实验参数,实现了对颗粒系统阻尼状态的调节,验证了理论模型给出的阻力形式.

## 2. 三维和准二维实验及结果

三维实验在一个高为 25 cm,直径为 19.6 cm 的圆柱容器中进行,通过向容器中装满空心漂珠来制备一个三维的颗粒床.床颗粒(即空心漂珠)主要成分为二氧化硅和氧化铝,其直径分布范围为 74—100  $\mu\text{m}$ ,平均密度约为 0.693  $\text{g}/\text{cm}^3$ .侵入物选用直径  $D$  为 2 cm,质量  $m$  为 12.3 g 的空心铜球,铜球尾部粘有一根细金属丝以标记球在颗粒床中运动所到达的位置.准二维实验则采用了一个由有机玻璃板围成的 25 cm  $\times$  2 cm  $\times$  24 cm 的矩形容器,容器内部同样填充尺寸为 74—100  $\mu\text{m}$  的空心漂珠作为颗粒床.侵入物采用厚度为 1.9 cm,直径  $D$  为 2.5 和 1.5 cm 的铜柱(质量  $m$  分别为 78.7 和 28.5 g).与文献 [7] 中床颗粒和侵入物都采用厚度相同的圆柱(直径不同)的情形不同,此容器对于侵入物铜柱是二维体系,而对于床颗粒(空心漂珠)则是其中一个横向维度受限制的三维体系,故称之为准二维实验系统.用每秒 868 帧的高速摄像机记录下侵入物以不同初速度  $u_0$  撞击并穿透三维和准二维颗粒床的过程,分析其穿透深度  $z$  随时间  $t$  的变化,根据  $z(t)$  的实验数据作微分运算可以得到侵入物运动的瞬时速度  $u$  随时间  $t$  的变化关系.

图 1 和图 2 中的散点分别是在三维和准二维实验中得到的  $u(t)$  数据.由图 1、图 2 可见,两图中的曲线有着完全不同的衰减趋势:三维实验的  $u(t)$  曲线呈凸形,即

$$\frac{d^2 u}{dt^2} < 0;$$

而准二维实验中的  $u(t)$  曲线呈凹形,即

$$\frac{d^2 u}{dt^2} > 0.$$

假设侵入物受到的全部阻力为  $f_d$ ,在重力驱动下,其所受合力为

$$F = mg - f_d.$$

由牛顿第二定律可知,

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dF}{dt} = - \frac{df_d}{dt}.$$

这说明侵入物在颗粒介质中受到的阻力  $f_d$  在三维系统中随时间  $t$  的增大而增大,而在准二维系统中  $f_d$  随  $t$  的增大而减小.

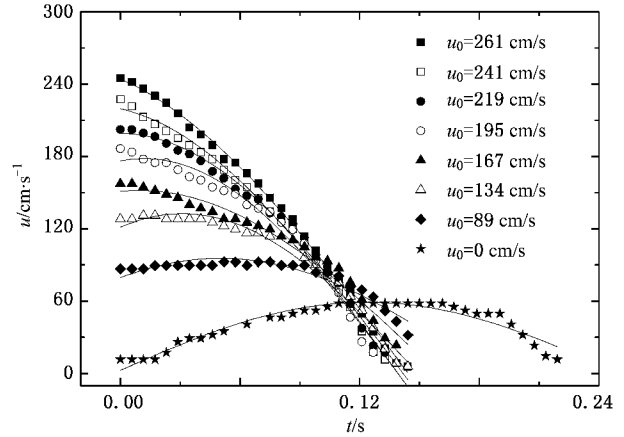


图 1 三维实验中运动物体的速度变化及利用理论模型的弱阻尼解形式拟合的结果

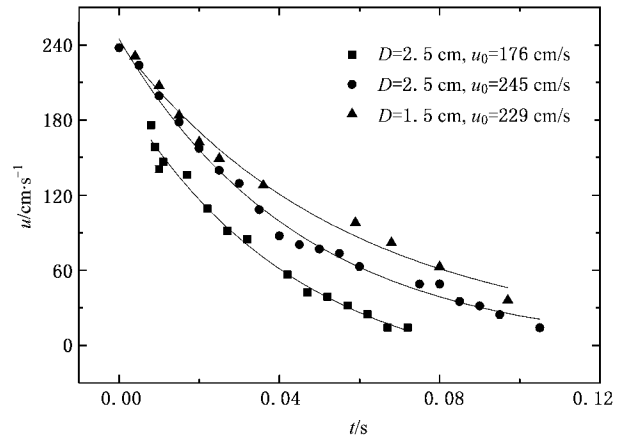


图 2 准二维实验中物体的速度变化及利用理论模型的强(临界)阻尼解形式拟合的结果

类似于对物体在流体中运动情形的考虑,阻力  $f_d$  的可能来源主要有两项,即与深度  $z$  相关的静压阻力项以及与速度  $u$  相关的黏性阻力项.深度  $z$  随时间  $t$  的增大永远是增加的,而侵入物要停止下来意味着其速度  $u$  必定最终随时间  $t$  的增大而减小.此实验结果表示在三维实验中与深度  $z$  相关的静压项在阻力中占主导地位,而在准二维实验中与速度  $u$  相关的黏性项占主导地位.下面将根据在此分析基础上建立的简单模型,作进一步分析和研究.

## 3. 理论分析及进一步的实验验证

先前的研究工作<sup>[9]</sup>表明,重力作用下物体在流

化的颗粒介质中运动所受到的力,除了驱动力重力  $mg$  及以上提到的阻力(包括静压阻力项  $kz$  和黏性阻力项  $\gamma u$ )之外,还需要附加类似“屈服应力”的摩擦项  $f$ . 因此侵入物的受力方程为

$$m \frac{du}{dt} = -\gamma u - \kappa z - f + mg. \quad (1)$$

令等效重力加速度

$$g' = g - f/m,$$

则(1)式变为

$$m \frac{du}{dt} = -\gamma u - \kappa z + mg'. \quad (2)$$

对于(2)式这个常系数二阶微分方程(以  $z$  为因变量)根据实际的实验情况,可以给定初始条件  $z(0) = 0, u(0) = u_0$ ,以构成一个完备可解体系. 令

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma}{\sqrt{m\kappa}}, \\ z_{\max} &= mg'/\kappa, \\ \tau &= \sqrt{m/\kappa}, \end{aligned}$$

将方程无量纲化,可以解析地得到三组解.

1) 当  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa} > 2$  时,即强阻尼条件下,方程(2)的解为

$$\begin{aligned} z\left(\frac{t}{\tau}\right)/z_{\max} &= 1 + A \exp(-\lambda' t/\tau) \\ &+ B \exp(-\lambda'' t/\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\lambda' = \frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4}}{2},$$

$$\lambda'' = \frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4}}{2},$$

$$A = \frac{\lambda'' - \frac{u_0 \tau}{z_{\max}}}{\lambda' - \lambda''},$$

$$B = \frac{-\lambda' + \frac{u_0 \tau}{z_{\max}}}{\lambda' - \lambda''}.$$

2) 当  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa} < 2$  时,即弱阻尼条件下,方程(2)的解为

$$z\left(\frac{t}{\tau}\right)/z_{\max} = 1 + A \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\tau}\right) \sin\left(\frac{\omega t}{\tau} + \phi\right) \quad (4)$$

式中

$$A = -\frac{1}{\sin\phi},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4 - \Gamma^2}}{2},$$

$$\phi = \operatorname{arccot}\left(\frac{\frac{\Gamma}{2} - \frac{u_0 \tau}{z_{\max}}}{\omega}\right).$$

3) 当  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa} = 2$  时,可称之为临界阻尼情况,此时方程(2)的解为

$$z\left(\frac{t}{\tau}\right)/z_{\max} = 1 + \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\tau}\right) \left(A \frac{t}{\tau} - 1\right), \quad (5)$$

式中

$$A = \frac{u_0 \tau}{z_{\max}} - \frac{\Gamma}{2}.$$

在三维实验中,由于静压阻力占主导地位,可以忽略掉黏性阻力项,即可以近似地认为  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa} = 0$ . 此时体系处于弱阻尼状态( $\Gamma < 2$ ),根据(4)式可知  $u(t)$  在短时间内满足三角函数形式的变化规律. 如图1中实线所示,用公式

$$u(t) = \frac{g'}{\sqrt{\kappa/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + u'_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

可以对所有的三维实验数据进行很好拟合. 而在二维或准二维实验中,黏性阻力项起主要作用,体系将处于强阻尼或临界阻尼状态. 在强阻尼情形下,方程的解(3)式表明运动物体的速度变化  $u(t)$  将呈指数衰减趋势;而对于临界阻尼,由于每次碰撞侵入都是一个快速过程,经历的总时间一般都小于  $0.1 \text{ s}$ ,因而  $At/\tau - 1 \approx -1$ ,此时方程的解(5)式及相应的  $u(t)$  也均近似为指数衰减形式. 图2中的准二维实验结果完全满足形如  $u = a + c \exp(-bt)$  (其中  $a, b$  和  $c$  为待定参数)的指数形式变化规律,拟合结果如图中实线所示.

控制参量  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa}$  为黏性阻力系数  $\gamma$  和静压阻力系数  $\kappa$  的平方根之比,反映了黏性阻力项和静压阻力项的竞争特点,可以作为判别颗粒介质体系处于何种阻尼状态的判据. 根据连续介质模型的观点,静压阻力项系数  $\kappa$  应该满足表达式

$$\kappa \approx \rho_m g \pi R^2,$$

其中  $\rho_m$  和  $R$  分别为颗粒床的体密度和侵入物的半径. 文献[9]已经证实,对于被侵入物撞击流化的三维颗粒床,  $\kappa$  的实验值与连续介质模型给出的理论值在数量级上符合. 而黏性阻力系数  $\gamma$  表征的是侵入物在运动过程中将颗粒介质向四周推开并穿入其中的难易程度,  $\gamma$  的取值显然也会随着侵入物尺寸的增大而增大. 对于维度受限的准二维系统,  $\gamma$  值要远大于松散的三维系统,从而使得黏性阻力项  $\gamma u$  的作用超过静压阻力项  $\kappa z$  的作用. 值得注意的是,

在阻尼判据表达式  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa}$  中,除了黏性阻力系数  $\gamma$  和静压阻力系数  $\kappa$  之外,侵入物的质量  $m$  也会影响  $\Gamma$  的取值.在保持  $\gamma$  和  $\kappa$  不变的条件下, $m$  由大变小同样可能使得  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa}$  从  $\Gamma < 2$  变为  $\Gamma \geq 2$ ,即使得颗粒系统从弱阻尼状态变为强阻尼或者临界阻尼状态.

由于侵入物质量  $m$  同时与侵入物的密度  $\rho$  和尺寸  $R$  有关,而  $\gamma$  和  $\kappa$  也是随着  $R$  的增加而增加的,因此可以考虑固定大球尺寸,通过调节大球的密度  $\rho$  来调节系统的阻尼状态.为了验证这一点,在三维颗粒床中选用密度很轻的木球(密度  $\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$ )以减小  $m$  来增加  $\Gamma$  值,进一步进行实验验证.颗粒床采用与上述三维实验相同的空心漂珠,并用同样的方法制备而成.图 3 所示为直径  $D = 30 \text{ mm}$  的木球从不同高度  $h$  自由落体坠入三维松散颗粒介质的实验结果.

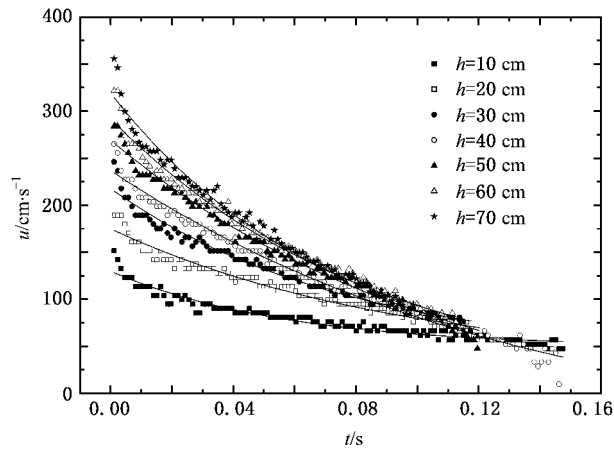


图 3 直径  $D = 30 \text{ mm}$  的木球从不同的高度  $h$  坠入三维颗粒床中穿过程的速度变化及利用理论模型的强(临界)阻尼解形式拟合的结果

由图 3 可见,木球在三维颗粒床中穿行的  $u(t)$  曲线满足  $\frac{d^2 u}{dt^2} > 0$ ,与准二维实验结果(图 2)相似,为凹形曲线.用强(临界)阻尼的  $u(t)$  解的形式能够很好地拟合图 3 中的各曲线,表明通过对质量的调节,三维系统也可以由静压项主导的阻力形式过渡到黏滞项不可忽略的阻力形式.与上述三维实验相比,这里只减小了侵入物的密度,对应的侵入物  $u(t)$  的衰减形式就从  $\frac{d^2 u}{dt^2} < 0$  (图 1)变为  $\frac{d^2 u}{dt^2} > 0$  (图 3),使颗粒床对侵入物的阻尼形式从弱阻尼变成了强(或临界)阻尼.这进一步表明,控制参数  $\Gamma = \gamma/\sqrt{m\kappa}$  能够很好地描述颗粒介质的阻尼特性.

## 4. 结 论

本文在已有研究工作的基础上,进一步研究了重力作用下侵入物在因受到撞击而被流化的颗粒介质中快速穿行时所受到的阻力情况.通过分析和解析求解简单的阻力模型,得到了控制颗粒系统处于不同阻尼状态的参量  $\Gamma$ ,并且不同取值范围的  $\Gamma$  给出的解能够很好地描述准二维和三维实验的结果. $\Gamma$  的表达形式揭示了静压阻力项和黏性阻力项的竞争是导致颗粒系统处于不同阻尼状态,并使得在其中运动的物体表现出不同速度衰减趋势的根本原因.同时分析了影响控制参量  $\Gamma$  的物理因素,并在此基础上进行实验.通过调节侵入物的密度成功地实现了对颗粒系统处于不同阻尼状态的控制,这说明所给出的阻力模型能够很好地描述此运动过程的主要性质和特征.

- [1] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [2] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [3] Zhong J, Peng Z, Wu Y Y, Shi Q F, Lu K Q, Hou M Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6691 (in Chinese) [钟杰、彭政、吴耀宇、史庆藩、陆坤权、厚美瑛 2006 物理学报 **55** 6691]
- [4] Peng Z, Hou M Y, Shi Q F, Lu K Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1195 (in Chinese) [彭政、厚美瑛、史庆藩、陆坤权 2007 物理学报 **56** 1195]
- [5] Wang H Y, Cao X P, Jiang Y M, Liu Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2784 (in Chinese) [王焕友、曹晓平、蒋亦民、刘佑 2005 物理学报 **54** 2784]
- [6] Hu M B, Kong X Z, Wu Q S, Wu Y H 2005 *Chin. Phys.* **14** 1844
- [7] Ciamarra M P, Lara A H, Lee A T, Goldman D I, Vishik I, Swinney H L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 194301
- [8] Lohse D, Rauhe R, Bergmann R, van der Meer D 2004 *Nature* **432** 689
- [9] Hou M Y, Peng Z, Liu R, Lu K Q, Chan C K 2005 *Phys. Rev. E* **72** 062301
- [10] Hou M Y, Peng Z, Liu R, Wu Y Y, Tian Y N, Lu K Q, Chan C K 2005 *Sci. Technol. Adv. Mat.* **6** 855
- [11] Zhang Q Y, Wu Y Y, Peng Z, Liu R, Lu K Q, Hou M Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6203 (in Chinese) [张权义、吴耀宇、彭政、刘锐、陆坤权、厚美瑛 2006 物理学报 **55** 6203]

# The drag force experienced by a projectile in granular medium under gravity<sup>\*</sup>

Zhang Quan-Yi<sup>1,2)</sup> Peng Zheng<sup>1,3)</sup> He Run<sup>1)</sup> Liu Rui<sup>1)</sup> Lu Kun-Quan<sup>1)</sup> Hou Mei-Ying<sup>1)</sup>†

1) *Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

2) *Department of Physics, Tongren Institute, Tonren 554300, China*

3) *School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*

( Received 19 March 2007 ; revised manuscript received 15 June 2007 )

## Abstract

To describe different behaviors of a projectile into a granular media, a model with both viscous drag and hydrostatic drag has been suggested. Analyses show that the parameter  $\Gamma$  plays a key role in determining the forms of the solutions to this model. When  $\Gamma < 2$ , the hydrostatic drag force is dominant, and when  $\Gamma \geq 2$ , the viscous drag is dominant. In these two cases, the projectile moves in the granular media with reverse deceleration variances. Experiments have been performed to verify this argument, and the obtained  $v(t)$  curves confirm this prediction.

**Keywords** : granular matter, drag force, dynamical processes

**PACC** : 4610, 0320

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10474124 ).

† E-mail : mayhou@aphy.iphy.ac.cn