

颗粒介质的离散态特性研究^{*}

彭 政¹⁾ 厚美瑛^{1)†} 史庆藩^{1)‡} 陆坤权¹⁾

1) 北京凝聚态物理国家实验室, 中国科学院物理研究所, 北京 100080)

2) 北京理工大学应用物理系, 北京 100081)

(2006 年 4 月 26 日收到, 2006 年 9 月 28 日收到修改稿)

回顾了颗粒介质中应力的分布和传播模式以及物体在颗粒介质中运动所受阻力的研究进展, 并报道了我们对颗粒体系中代表离散特性的颗粒尺寸效应对颗粒介质特性影响的研究. 研究发现物体由于自身重量在颗粒介质中下沉的深度随着颗粒尺寸的增大单调减小. 球体在下陷过程中受到的颗粒床的支撑力, 除了在约 1 mm 范围的表面作用区域以外, 与下陷深度之间满足很好的幂率关系, 幂值在 1.5—1.0 之间, 并且此幂值随着颗粒尺寸的增大而单调减小. 颗粒床的支撑力与下陷深度的幂率关系可解释为颗粒介质内部应力结构重组的宏观反应结果.

关键词: 颗粒物质, 离散介质力学

PACC: 8270, 4610

1. 引 言

颗粒体系中许多异于固体和流体的奇异特性^[1, 2]均缘于颗粒介质的离散性引起的应力分布的非均匀性, 因此对于应力以及应力在颗粒介质中的传播方式的研究是研究颗粒介质离散态性质的一个重要的基础问题.

长期以来工程界一直借用连续介质的弹塑性模型来描述颗粒介质的整体行为^[3], 但是弹塑性模型需要知道应力与应变的本构关系, 而在颗粒介质中怎样定义应变场仍是一个有争议的问题^[4-6]. 弹塑性模型的另一个问题是无法在颗粒尺度范围内描述颗粒体系的一些特性, 比如颗粒介质内部存在着大于平均力的不均匀的“力链”结构^[7-9], 以及与沙堆的制备历史相关^[10-11]的沙堆底部应力分布存在的中心应力凹陷现象^[12].

早在十多年前, Liu 等人^[7]就对颗粒介质底部应力大小的概率分布进行了测量, 发现大于平均力的应力出现的概率随着应力增大呈指数衰减, 并提出了 q 模型成功地解释了这一指数分布的实验现象. Wittmer 等人^[13, 14]则提出了 OSL (oriented stress linearity) 模型较好地解释了沙堆底部的中心应力凹陷, 以及沙堆应力响应与形成历史有关的现象.

1.1. 颗粒介质的应力传播模型

对于在颗粒床表面局域施加点压, 使介质产生弹性范围内的应力, 前面提到的三种模型: 弹塑性模型、 q 模型以及 OSL 模型所给出的应力传播形式是完全不同的. 弹塑性理论模型得到弹性传播模式, q 模型为扩散传播模式, OSL 模型则给出波传播模式^[15]. 这三种传播模式的差别可以由颗粒床深 h 处的应力响应格林函数看出. 对于弹性传播模式 (椭圆型偏微分方程), 其应力响应函数是一个半高宽随着深度 h 线性增加的钟形曲线, 应力的峰值位于顶部施力点的正下方. 对于扩散传播模式 (抛物型偏微分方程), 其应力响应函数同样是一个简单的单峰分布, 但是峰的半高宽正比于深度 h 的 $1/2$ 次方. 而对于波传播模式 (双曲型偏微分方程), 颗粒介质底面的应力分布在二维情况下是一个对称的双峰 (三维情况下对应为一个环带), 在施力点的正下方存在一个应力极小点^[16]. 看起来似乎只要直接测量到颗粒介质在表面加载点压情况下的响应函数的形式就可分辨出颗粒介质中的应力传播方式了. 然而过去几年里已有的实验和模拟的结果却无法给出一个显而易见的结论.

Geng 等人^[17]和 Mueggenburg 等人^[18]分别在二维和三维有序排列的颗粒介质中观察到了底部应力分

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: A0402-10474124) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

布存在的双峰结构,正如双曲型偏微分方程描述的波传播情况一样. Geng 等人^[17]同时发现随着二维颗粒介质中无序度(包括颗粒排列的无序以及颗粒形状引入的无序)的增加,这种双峰的应力分布会在系统尺度较大时变成弹性传播的单峰结构. 这种应力分布的单峰结构在无序排列的三维颗粒介质中也被观察到^[19],其分布的半高宽随着深度的增加线性增加. Silva 等人^[20]用方形颗粒在小系统尺度下甚至观察到了扩散传播形式的应力响应. Moukarzel 等人^[21]则通过实验和模拟研究了颗粒介质的位移响应函数,发现颗粒位移场宽度在小系统尺度(几个颗粒尺寸)范围内随深度的平方根增大(类似于扩散模型),而在系统尺度变大时则线性依赖于深度(类似于弹性模型).

以上这些研究结果似乎相互矛盾. 实际上这些描述都是正确的,只是它们适用于不同尺度的系统中^[22, 23]. Goldenberg 等人^[22, 24]指出力链存在的本质是由于颗粒系统是一个在宏观上含有相对较少组分(颗粒)的体系,每个颗粒在局域范围内都是各向异性的,因此系统尺度较小的颗粒体系会偏离宏观的弹性模型特性,但粒子数足够多的大尺度体系仍然表现出弹性模型特性. 同时指出如果能观测到固体原子之间的作用力,那么在固体的原子尺度上应该同样可以观察到原子之间的“力链”. 通过在二维模拟中调节颗粒之间的摩擦系数以及系统的无序度, Goldenberg 等人^[23]系统研究了颗粒系统对局域小应力的响应,发现应力在颗粒介质中的传播在短程范围内是以波的形式传播,而在长程范围则体现出了弹性传播的性质,而且体现波传播形式的特征短程区域会随着颗粒间的摩擦系数以及系统无序度的增大而缩小,也就是说摩擦和有序会增大颗粒系统的弹性适用区域. 弹性模型在颗粒介质大尺度体系内的成立也正是长久以来工程界用弹性理论也能较成功地处理大体系颗粒物质中的许多实际问题的原因.

1.2. 颗粒介质中的阻力研究

应力在准静态的颗粒介质中的传播问题似乎已经得到了一个完整的解释^[15]. 然而实际情况通常要涉及到颗粒介质的塑性形变问题,即对颗粒介质施加外力作用以后会导致颗粒介质产生不可恢复的形变,这时的情况显然更加复杂. 已有模型的适用性仍有待实验验证. 运动物体在颗粒介质中所受到的阻

力就是一个涉及颗粒介质塑性形变的问题.

近年来这方面的研究结果包括圆棒在三维颗粒介质中低速水平运动时^[25]阻力 F_d 线性依赖于棒的直径 D , 与棒的深度 h 呈二次方关系 $F_d \propto Dh^2$, 而与棒的运动速度和颗粒尺寸无关,同时粗糙颗粒带来的阻力略大于光滑颗粒. Schiffer 的小组还从实验和理论上研究了物体在颗粒介质中水平运动时受到的阻力的涨落过程^[26-28],发现随着物体的深度和颗粒尺寸的不同,阻力的涨落呈现不同的三种形式:周期涨落、随机涨落和阶梯涨落. 在周期涨落的区域,验证了文献^[25]中的结论. 他们之后的实验^[29]还发现不同形状的物体在颗粒介质中水平低速运动受到的阻力大小与物体的截面积成正比,而随深度的增长关系比线性增长更快,同时阻力的大小与物体的形状关系不大. Schiffer 小组^[30, 31]在另一项研究中将一个圆形平板垂直压入三维颗粒介质中发现受底部边界的影响,颗粒介质对平板的阻力在接近底部一定距离时呈指数增长. Geng 等人^[32]发现物体在二维颗粒介质中缓慢移动受到的阻力平均值与约化的堆积分数呈幂率关系(幂值 1.5),与物体运动的速度呈缓慢的对数增加,而与物体的尺寸呈非线性的依赖关系.

1.3. 颗粒尺寸

以上讨论的物体在颗粒介质中运动受到的阻力,显然与固体的塑性形变以及液体的黏性阻力不同,不同的主要原因在于颗粒介质在宏观上是离散的,而一般的固体和液体在宏观上是连续的. 因此研究颗粒介质中的阻力要遇到的一个不可避免的问题就是要研究宏观离散的颗粒介质中颗粒的尺寸与阻力之间的联系. 在文献^[30-32]中都涉及到了颗粒尺寸与阻力之间关系的实验研究,但均未能得到有信服力的结论. 然而文献^[30, 31]中颗粒尺寸的不同对阻力值的影响是很明显的,因此有必要对阻力与颗粒尺寸的依赖关系进行更系统的研究.

本文通过在不同颗粒尺寸的床中测量受重力作用的钢球准静态陷入颗粒床中的深度,系统研究了颗粒体系的阻力与颗粒尺寸的关系,发现随着颗粒尺寸的增加,钢球的下陷深度单调减小. 在下陷过程中颗粒床对钢球的支撑力对深度的依赖关系满足幂率关系,幂值在 1—1.5 之间变化. 这种阻力随颗粒尺寸不同的系统变化第一次被观测到. 这表明物体在自身重力下在颗粒床中准静态下陷的深度或许是

一个更敏感依赖于颗粒尺寸的参数,也就是说我们找到了一个较好的实验方法来研究颗粒的尺寸效应。

2. 实验方法

实验中采用的颗粒床由一个装满玻璃颗粒,直径为 16.9 cm,高为 10 cm 的玻璃容器来提供。容器的尺寸经过实验检验足够大,边界效应不会造成对实验测量的影响。大球通过一根细金属链与力传感器(力传感器精度 0.1 g)连接,力传感器固定在一个可以精确控制位移的升降台上。以球与颗粒床相切时的位置为初始位置,升降台以 $50 \mu\text{m/s}$ 的速度控制大球在颗粒床中匀速下降,直到金属链完全松弛,大球不再下沉。测量此时大球在颗粒床的陷入深度 d ,并通过力传感器记录下大球在下沉过程中所受到的颗粒床的支撑力。颗粒床的制备采取了在容器中心用漏斗从固定的高度(漏斗口比容器口平面高约 5 cm)加入颗粒的方法,在漏斗加入颗粒完毕后用直尺将颗粒床表面齐容器口刮平,以得到一个平整的颗粒床初始平面。每一次实验均重新制备颗粒床,以保持相同的初始条件。采用这种方法制备的颗粒床堆积分数约为 $60\% \pm 0.5\%$ 。实验中大球采用了三种尺寸的钢球,半径 R 分别为 10 mm, 12.5 mm 和 15 mm。大球密度 ρ_R 为 7.8 g/cm^3 。采用了半径 $r = 0.19\text{—}1.2 \text{ mm}$ 的 13 种玻璃颗粒为床颗粒。床颗粒密度 ρ_r 为 2.5 g/cm^3 。由于玻璃颗粒在尺寸较小时颗粒间的内聚力受湿度影响较为严重,所以在实验过程中保证湿度在 10%—30% 之间。

3. 实验结果

图 1 是三种尺寸的大球在 13 种颗粒床中沉入深度随床颗粒尺寸变化的曲线。曲线上的每个点都是至少 5 次实验的平均结果。可以看出,随着床颗粒尺寸的增加,大球的沉入深度单调下降。直观上在不考虑密度差别时,当 $r \rightarrow R$, 沉入深度 $d \rightarrow 0$, 因为此时大球与单个的床颗粒已经没有区别了。在另一个极限当 $r \rightarrow 0$ 时,由于床颗粒变小,颗粒床整体的表面积增大,对水的吸附能力增强,导致内聚力的影响加剧,最终将会导致大球的下沉深度在一定程度上随床颗粒尺寸变小而变小。这时的情况比较复杂,影响因素也不好控制。故在本文中选择的床颗粒的尺

寸均不是太小,同时保持较小的环境湿度,以便将湿度导致的颗粒间内聚力的影响降到最小。

为考察大球下沉深度与大球-床颗粒尺寸比之间的关系,图 2 中的插图以大球半径 R 参数对图 1 进行了无量纲标度,由三条曲线的重合情况可以看出 R 并不是一个很好的标度参数。

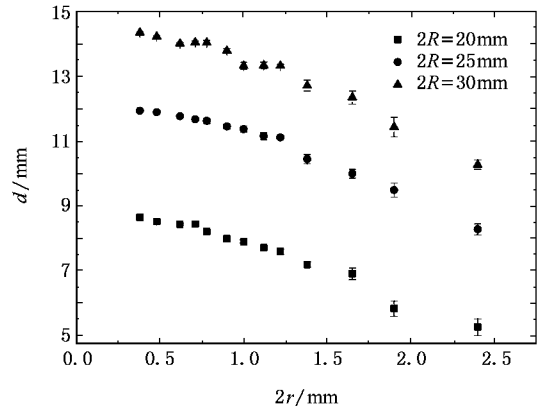


图 1 直径 $2R = 20, 25, 30 \text{ mm}$ 的钢球在颗粒直径 $2r = 0.38\text{—}2.4 \text{ mm}$ 的十三种颗粒床中的最终下沉深度随颗粒直径的变化关系

3.1. 颗粒介质与“浮力”

对于浮在液体表面的物体,我们由阿基米德原理知道 $\frac{W}{V_s} \propto \rho_l$ ($\rho_l = \text{常数}$), ρ_l 为液体的密度, W 和 V_s 分别为物体的重量和物体沉入液体的体积。“颗粒流体”也许也存在相类似的描述关系。若把颗粒介质描述成为一种具有“等效密度”的液体,它的“等效密度”应可由大球沉入的深度决定,而此密度应与大球的尺寸无关。图 2 为以大球的重量 W 与其沉入体积 V_s 的比值 W/V_s , 即“等效密度”为纵坐标,颗粒与大球的尺寸比 r/R 为横坐标进行标度的结果。由图可见,三条曲线较好的重合,与我们设想的一致。与液体不同之处在于颗粒床的“等效密度”随着颗粒尺寸的增加而增加,不是一个随材料决定的常数。

为验证颗粒床“等效密度”的概念,还应该比较不同密度的大球的沉入深度与颗粒床“密度”之间的关系。

由于在实验过程中大球下沉的速度很慢 ($50 \mu\text{m/s}$),而大球与力传感器之间采用的细铁链这种软连接方式保证了大球在下沉过程中始终是在自身重力下达到力平衡,故可以将大球下沉的过程看

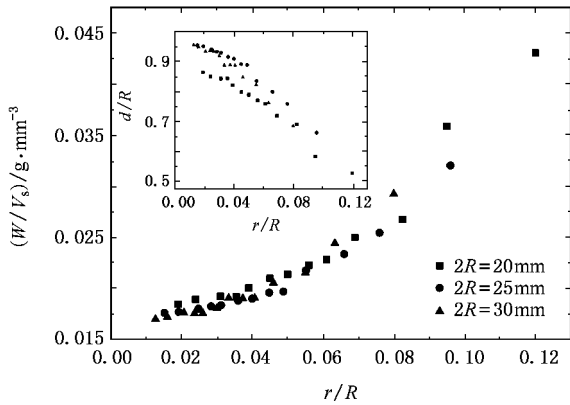


图 2 颗粒床的“等效密度”随 r/R 的变化关系. 插图为图 1 中的数据用 R 进行标度得到的结果

成是一个时时处于力平衡的准静态过程. 因此在不同沉入深度测得的支撑力, 可以看成为对应于不同下沉深度 d 时, 具有不同等效密度 ρ_R 的大球的重量. 图 3(a) 和图 3(b) 分别是 $R = 15 \text{ mm}$ 的大球在最大和最小的颗粒床中下沉对应的力曲线, 每条力曲线同样是 5 次以上实验平均的结果. 对于涨落较大的力曲线, 我们对曲线进行了平滑处理. 由支撑力与下沉深度的关系我们可以对应出一系列具有等效 ρ_R 的大球的下沉深度. 图 4 是由选取的五种等效 ρ_R 给出的颗粒床的“等效密度” f/V_s 随 r/R 的变化关系图. 由图 4 可见, 对于相同的 ρ_R , 三个尺寸的大球如同图 2 所示, 能较好的归一到了一起. 但是不同的 ρ_R 归一的曲线随着密度的增加向下漂移. 尽管不同 ρ_R 归一的曲线无法重合到一起, 但是同一 ρ_R 的曲线随着 r/R 的减小“等效密度” f/V_s 都逐渐归一趋于一个常数. 我们知道当 r 趋于零 (或 r/R 趋于零) 时, 颗粒介质趋向于连续介质, 而作为连续介质的液体, 在体现浮力作用时液体密度就是一个不变的常数. 这说明了用“等效浮力”来描述颗粒介质在颗粒介质趋向连续极限时是满足于流体特性的. 当 r/R 逐渐增大时, 颗粒介质的离散特性开始表现出来, 支撑力 (见图 3(a)) 以及“等效密度”的涨落开始变大 (在 ρ_R 较小时更加明显), 但所有 ρ_R 对应的颗粒床的“等效密度”都有随着颗粒介质离散性增强 (即 r/R 增大) 而发散的 trend. 并且随着 ρ_R 的减小, “等效密度”发散的速度逐渐变快. 尽管“等效密度”的说法可以将同样 ρ_R 不同 R 的曲线较好的归一到一起, 并且在趋向连续极限时满足液体的一般特性, 但是由于不同 ρ_R 的曲线无法重合在一起, 因此将颗粒

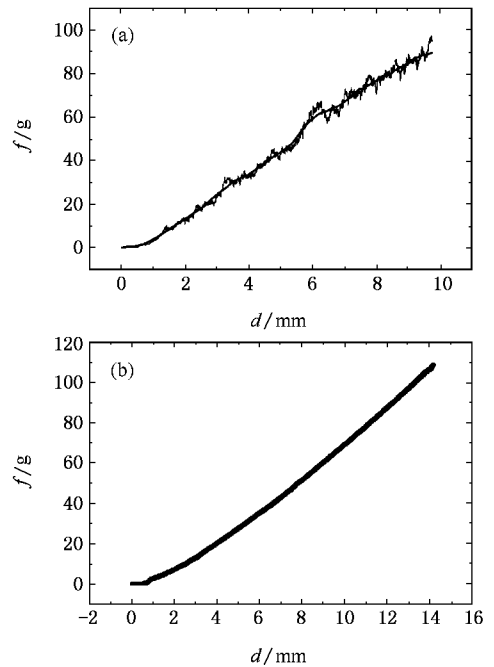


图 3 (a), (b) 分别为 $R = 15 \text{ mm}$ 的钢球在 $r = 1.2 \text{ mm}$ 和 0.19 mm 的颗粒床中下沉所受的颗粒床的支撑力随下沉深度的变化关系. 图 (a) 中的实线为平滑处理后的结果. 由于实验中采用的力传感器显示的是大球的重量, 故图中的纵坐标支撑力的单位直接取为了质量单位“g”

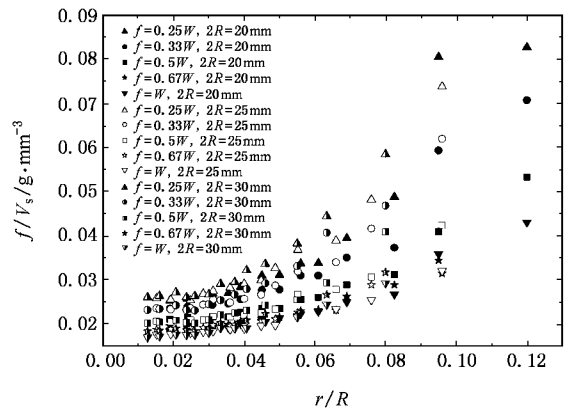


图 4 当大球密度 ρ_R 分别等于 0.25, 0.33, 0.5, 0.67 和 1 倍钢球真实密度时, 颗粒床的“等效密度”随 r/R 的变化关系

介质类似液体的“等效密度”的说法存在局限性, 仍有待进一步的研究.

以上将物体在颗粒介质中沉入的深度用“等效浮力”的观点将颗粒介质与液体进行了类比, 发现这种类比存在一定的局限. 那么是否能将颗粒介质与弹性固体进行比较呢?

3.2. 颗粒介质与‘弹性形变’

对于在压力 F 作用下弹性接触的两个球形弹性体, Hertz 给出了两个球之间由于形变而压缩的距离 δ 与压力 F 之间的关系为

$$\delta = F^{2/3} \left[D^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]^{1/3},$$

其中 R_1 和 R_2 分别为两个球的半径, D 与两球的材料性质有关^[33]. 而 Laudau 和 Lifshitz^[33] 则将这一结论推广到两个任意形状的有限尺寸弹性体之间的接触, 都满足关系 $F \propto \delta^{1.5}$. 如果将整个颗粒床看成是一个有限尺度的弹性体, 那么它与陷入的大球之间的接触也应该满足 $F \propto \delta^{1.5}$ 的关系, 此时 δ 为球陷入的深度 d . (在 Laudau 和 Lifshitz 理论中要求出现的形变 δ 是小形变, 在我们的实验中, 大球近似为刚性, 其自身形变可以忽略, δ 主要由颗粒床的形变带来, 而所有大球陷入的深度均没有超过球的半径, 这对于大尺度的颗粒床来说可以看成是小形变.)

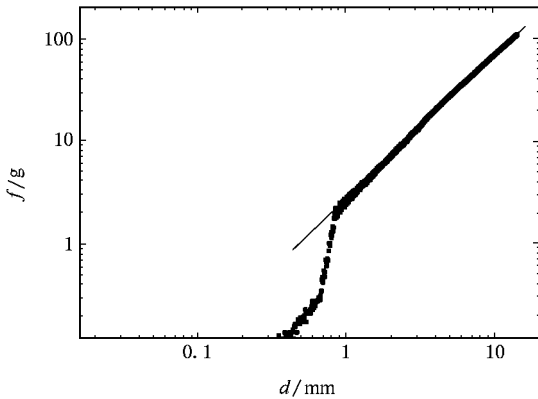


图5 大球在颗粒床中下沉过程中支撑力 f 随下沉深度 d 的变化关系 $R = 15 \text{ mm}$, $r = 0.19 \text{ mm}$; 图中的实线是一条辅助直线

通过测量大球在颗粒介质中下沉时受到的颗粒床的支撑力随下沉深度的变化, 我们发现除了在表面约 1 mm 的范围以外, 支撑力 f 与下沉深度 d 在双对数坐标里是一个很好的线性关系 $f \propto d^\alpha$, α 为此直线的斜率(见图 5). 图 6 给出了直径为 30 mm 的钢球在各种颗粒尺寸的颗粒床中支撑力与下沉深度的变化曲线, 可以看到, 对于各种颗粒尺寸的颗粒床, 都存在一个表面作用区域, 而且不同颗粒尺寸的颗粒床的表面作用的区域几乎都是 1 mm 左右, 这与普通的弹性固体的宏观表现很不相同. 1 mm 的深度对于小颗粒尺寸约是 2—3 层, 而对于大颗粒尺寸

连一层都不到. 表面作用只与深度有关系而与颗粒的层数没有关系, 说明表面作用是表面的颗粒在重力作用下体现连续介质特性的结果, 而与体现离散介质特性的颗粒之间的几何相互作用无关. 另外由于表面的颗粒在受到钢球挤压后可以向两侧移动甚至向上方膨胀, 所以表面层的作用力要小于颗粒床内部, 也就是说颗粒介质的表面比内部更容易侵入, 这与存在表面张力作用的液体刚好相反. 这约 1 mm 深度的表面作用区域分界明显的存在, 也保证了我们测到的幂率关系是真实的颗粒介质内部的体效应.

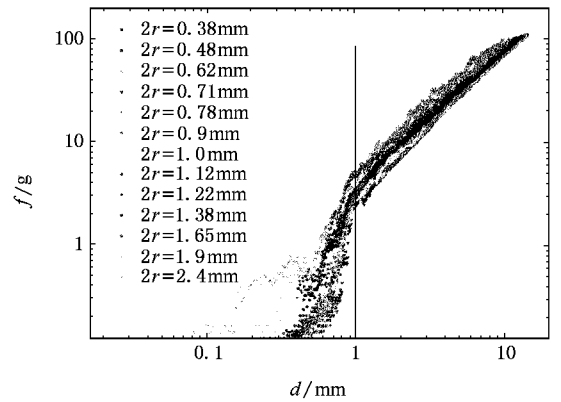


图6 支撑力 f 在不同颗粒尺寸的颗粒床中随下沉深度 d 的变化关系 $R = 15 \text{ mm}$, $2r = 0.38\text{—}2.4 \text{ mm}$, 图中的直线对应 $d = 1 \text{ mm}$ 的深度

图 7 给出了不同尺寸的大球在不同颗粒床中支撑力的幂值 α , $\alpha \approx 1.0\text{—}1.5$, 并且随着床颗粒尺寸的增大而减小. 大球在颗粒介质中下沉的过程受到的支撑力随下沉深度的变化满足幂率关系, 这一点与 Hertz 描述的弹性固体比较相似, 然而幂值却并不

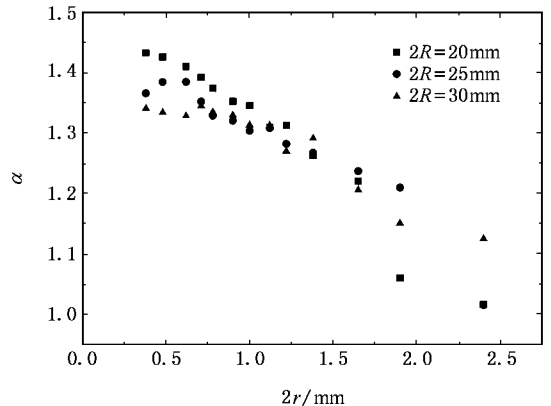


图7 支撑力的幂率指数 α 随颗粒尺寸的变化关系 $2R = 20, 25, 30 \text{ mm}$

等于弹性固体中的 1.5,而是随着颗粒尺寸的增大而减小.由于颗粒尺寸越小,颗粒介质就越趋近于连续介质,因此在颗粒尺寸趋近于无穷小时幂率趋近于 Hertz 关系的 1.5 次方应为合理.

4. 讨 论

对于颗粒介质的形变与外加压力之间的幂率关系,以前有过相关报道^[34,35]. Hidalgo 等人^[34]和 Travers^[35]等人分别研究了在三维和二维受限的颗粒介质在单轴压力下的形变和压力之间的关系,均得到了幂率关系.在 Hidalgo 等的三维情况中得到的幂值为 2.6,而在 Travers 等的二维情况中,则依赖于采用的二维颗粒(圆柱体)的硬度,幂值在 1.4 到 3.9 之间变化.我们的实验与文献^[34,35]不同之处在于,在我们的实验中,颗粒介质的表面在大球下压过程中是自由的,而文献^[34,35]中都是单轴的压缩封闭受限的颗粒介质,因此我们实验得到的幂值比文献小也就是可以预见的了.在 Travers 等的二维颗粒体系封闭受压的实验中,分析了为什么体系呈现幂率关系的宏观幂值(对于坚硬的树脂玻璃圆柱体的晶格排列,幂值为 3.9)要远大于微观幂值(即实测的两个圆柱体之间的 Hertz 接触幂值为 1.8),认为体系封闭受压除了局域的 Hertz 形变以外,晶格排列的几何缺陷可能主导了这种幂值上的差别.也就是说封闭受压的颗粒介质中除了局域的 Hertz 形变的幂率关系以外,体系内部结构的排列变化很可能是带来这种更大幂值的幂率关系的原因.

在我们的实验中,当颗粒尺寸变大,其离散性不可忽略时,连续体弹性形变理论已不能适用,而由于颗粒介质的表面是自由的,因此颗粒介质的宏观形变(即大球的下陷深度 d)应该主要由颗粒介质的内部结构(应力链)的重组带来,而颗粒之间微观的 Hertz 形变影响较小.而且这种内部结构变化带来的影响应该随着介质的颗粒尺寸与大球尺寸越接近越占主导.因此在我们颗粒介质表面为开放表面的实验中测量到的压力(反作用即为支撑力) f 随下沉深度 d (即为颗粒介质的形变)的幂率变化关系 $f = kd^n$ 应该主要反映的是颗粒系统内部应力结构的重组带来的宏观结果.

在文献^[25]中,Albert 等人研究了圆棒在表面自由的三维颗粒介质中低速水平运动时的阻力,发现阻力 F_d 线性依赖于棒的直径 D ,与棒插入颗粒介质

的深度 h 呈二次方关系 $F_d \propto Dh^2$,并与颗粒的尺寸无关.在他们的实验中阻力的来源同样是三维颗粒介质应力结构的重组,而且由于研究的是水平运动,故颗粒之间局域的 Hertz 形变相对于我们的垂直下压的实验来说更加可以忽略.如果将圆棒插入颗粒介质的深度 h 看作颗粒介质的宏观形变,那么颗粒介质与圆棒接触的单位面积上受到的应力就应该有 $\sigma \propto h$ (注意到 Dh 正比于圆棒与颗粒介质的接触面积),这说明三维颗粒介质中应力结构重组所需的压力很有可能与形变的一次方成比例,而且这个比例关系还与颗粒的尺寸无关.

颗粒体系应力结构重组的系数 k 应该由系统的微观性质和相互作用决定,对于文献^[34]中三维封闭受压的颗粒介质来说, k 应该与系统的微观颗粒之间的 Hertz 作用有关.在封闭受压的体系中压缩的宏观形变除了使体系内部结构重组以外,还造成了微观颗粒之间的 Hertz 形变,我们假设这种关系是最简单的 Hertz 关系 $k \propto d^\beta$ ($\beta = 1.5$),那么在文献^[34]中应该对应应有 $f \propto d^{\alpha+\beta}$.在我们的实验中测量的三维颗粒介质结构重组的幂值中最小的幂值亦为 $\alpha \approx 1$,与前面对文献^[25]分析得到的幂值相同.由上面的分析 Hidalgo 等所测幂值即应为 $\alpha + \beta \approx 2.5$,这与 Hidalgo 等人的实验测量值 2.6 非常接近.这种解释只是一种合理的推测,对于颗粒介质内部力链结构分布和强度的变化还有待于进一步的实验和理论模拟的研究.

5. 结 论

综上所述,在回顾了颗粒介质中应力传播模式以及物体在颗粒介质中运动受到的阻力的最新研究进展之后,本文着重报道了颗粒介质中代表颗粒离散性质的颗粒尺寸对物体在颗粒介质中下沉深度的影响.由测量大球在自身重力平衡下准静态陷入不同颗粒尺寸的颗粒床中的沉入深度以及在下陷过程中受到的颗粒床支撑力随深度的变化,得到了沉入深度与颗粒尺寸的关系.发现颗粒尺寸越大,球下陷深度随之单调减小.不同尺寸的大球的下陷深度能用颗粒介质“等效浮力”的概念归一在一起,但是不同密度的大球的下陷深度无法较好的归一,说明在颗粒介质中采用“等效浮力”的观点存在局限.而大球在下陷过程中受到的颗粒床的支撑力与下陷深度的变化关系除了在约 1 mm 范围的表面作用区域以

外都满足很好的幂率关系,幂值在 1.5—1.0 之间,并随着颗粒尺寸的增大而减小.一个有趣的现象是表面作用区域的大小与颗粒尺寸大小无关,说明表面作用区域是重力作用下的连续介质特性的结果,与离散态性质无关.在本实验中得到的颗粒床的支

撑力与下陷深度的幂率关系在宏观上反应了颗粒介质内部应力的结构重组.

本文作者感谢 Behringer 教授有益的讨论和张彤与刘锐在实验上的帮助.

- [1] Zhong J , Peng Z , Wu Y Y *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6691 (in Chinese) [钟 杰、彭 政、吴耀宇等 2006 物理学报 **55** 6691]
- [2] Zhang Q Y , Wu Y Y , Peng Z *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6203 (in Chinese) [张权义、吴耀宇、彭 政 2006 物理学报 **55** 6203]
- [3] Nedderman R M 1992 *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge : Cambridge University Press)
- [4] Cates M E , Wittmer J P , Bouchaud J P *et al* 1998 *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **356** 2535
- [5] Combe G , Roux J N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3628
- [6] Wang H Y , Cao X P , Jiang Y M *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2784 (in Chinese) [王焕友、曹晓平、蒋亦民等 2005 物理学报 **54** 2784]
- [7] Liu C H , Nagel S R , Schecter D A *et al* 1995 *Science* **269** 513
- [8] Coppersmith S N , Liu C H , Majumdar S *et al* 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4673
- [9] Howell D , Behringer R P , Veje C 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 5241
- [10] Vanel L , Howell D , Clark D *et al* 1999 *Phys. Rev. E* **60** R5040
- [11] Geng J , Longhi E , Behringer R P *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 060301
- [12] Smid J , Novosad J 1981 *Proc. Powtech. Conference* 1981 *Ind. Chem. Eng. Symp.* **63** D3V1
- [13] Wittmer J P , Claudin P , Cates M E *et al* 1996 *Nature* **382** 336
- [14] Wittmer J P , Claudin P , Cates M E 1997 *J. Phys.* **17** 39
- [15] Luding S 2005 *Nature* **435** 159
- [16] Bouchaud J P , Claudin P , Levine D *et al* 2001 *Eur. Phys. J. E* **4** 451
- [17] Geng J , Howell D , Longhi E *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 035506
- [18] Mueggenburg N W , Jaeger H M , Nagel S R 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031304
- [19] Reydellet G , Clement E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3308
- [20] Silva M D , Rajchenbach J 2000 *Nature* **406** 708
- [21] Moukarzel C F , Pacheco-Martinez H , Ruiz-Suarez J C *et al* 2004 *Granular Matter* **6** 661
- [22] Goldhirsch I , Goldenberg C 2004 *The Physics of Granular Media* (Weinheim : Wiley-VCH) p3
- [23] Goldenberg C , Goldhirsch I 2005 *Nature* **435** 188
- [24] Goldenberg C , Goldhirsch I 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 084302
- [25] Albert R , Pfeifer M A , Barabasi A L *et al* 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 205
- [26] Albert I , Tegzes P , Kahng B *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5122
- [27] Albert I , Tegzes P , Albert R *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 031307
- [28] Kahng B , Albert I , Schiffer P *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 051303
- [29] Albert I , Sample J G , Morss A J *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 061303
- [30] Stone M B , Bernstein D P , Barry R , Schiffer P *et al* 2004 *Nature* **427** 503
- [31] Stone M B , Barry R , Bernstein D P *et al* 2004 *Phys. Rev. E* **70** 041301
- [32] Geng J , Behringer R P 2005 *Phys. Rev. E* **71** 011302
- [33] Landau L D , Lifshitz E M 1959 *Theory of Elasticity* (Oxford : Pergamon)
- [34] Hidalgo R C , Grosse C U , Kun F *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 205501
- [35] Travers T , Bideau D , Gervois A *et al* 1986 *J. Phys. A* **19** L1033

Effect of particle size on the sinking depth of an object supported by a granular bed^{*}

Peng Zheng¹⁾ Hou Mei-Ying^{1)†} Shi Qing-Fan¹⁾²⁾ Lu Kun-Quan¹⁾

¹⁾ *Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

²⁾ *Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

(Received 26 April 2006 ; revised manuscript received 28 September 2006)

Abstract

In this paper we briefly review the latest progress on the propagation of stress in granular bed and the resistant force of an object moving in granular media, and report our studies on the grain-size effect, which reveals the discrete properties of granular media. We found that the sinking depth of a sphere on a granular bed driven by its own weight decreases monotonically with increasing grain-size. The supporting force of the granular bed experienced by the intruder sphere, during sinking, is measured. It is found that except for about 1 mm depth near the surface, the supporting force and the sinking depth of the sphere is related by a power-law with exponents between 1.5—1.0. The exponent decreases with increasing grain-size. This-size dependence of the power-law relation can be a macroscopic manifest of the reorganization of the stress chains in the granular system during the sinking process of the intruder sphere.

Keywords : granular matter, mechanics of discrete systems

PACC : 8270, 4610

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. A0402-10474124).

[†] Corresponding autor. E-mail : mayhou@aphy. iphy. ac. cn