

稀薄颗粒气体的运动速度几率分布函数

厚美瑛, 李寅闯

中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190

E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

2009-02-10 收稿, 2009-03-19 接受

国家自然科学基金(批准号: 10720101074, 10874209)和中国科学院知识创新工程重要方向性项目(编号: KKCX1-YW-03, KJCX2-YW-L08)资助

摘要 利用在微重力环境下获得的稀薄颗粒体系长时间(2 h)运动的录像数据, 得到了颗粒气体的非高斯速度几率分布, 分布函数接近负 e 指数. 应用湍流中的朗之万方程修正形式, 探讨给出颗粒体系速度几率分布函数普适表达式的可能性.

关键词
颗粒物
速度分布律
朗之万方程

平衡态统计力学最重要的基础之一是分子气体的速度分布律. 由于分子体系为能量守恒体系和它的各向同性的特性, 麦克斯韦-玻尔兹曼分布 $f(c) \propto \exp(-c^2)$ 可以被推导出来 ($c=v/v_T$, 其中 v 为分子的运动速度, v_T 为热涨落速度). 然而对于自然界大量存在的离散态物质, 由于碰撞能量损耗等因素影响导致了颗粒物质许多与平衡态体系不同的特性. 例如, 颗粒物质中团簇与周期性结构的形成^[1-3]、速度的非高斯分布特性^[4-8]、压力的反常分布^[9]等, 对于这种远离热平衡态的体系, 其动力学描述的基础建立在该动态稳定体系的平均能量的涨落具有与驱动方式无关的可定义分布形式. 这里, 颗粒体系指的是以非弹性碰撞为相互作用的大量尺寸大于 $1 \mu\text{m}$ 的宏观物体组成的体系. 此类体系需要通过外界能量输入来平衡碰撞引起的能量损耗, 保证体系的稳定. 这样的稳态是远离平衡态的动力学稳态^[10,11]. 当颗粒足够稀薄、外加能量足够大、颗粒间相互作用以两体碰撞为主时, 我们将这样的颗粒体系称为颗粒气体. 此时单体间相互关联可以忽略, 单体的分布函数 $f(r, v, t)$ 就可以描述这个体系. 对于处于热力学平衡的理想气体来说, 只需要用密度和温度这两个独立的宏观量

就可以替代分布函数来描述气体性质. 但对于颗粒气体来说, 是否存在有限个宏观量来描述颗粒体系是个物理学家感兴趣的问题.

过去一二十年间, 对于颗粒气体速度分布律的实验和模拟研究引起了物理学家广泛的兴趣, 所得的结果由负 e 指数分布 $\exp[-(v/v_c)]$ ^[12,13], 或扩展 e 指数分布 $\exp[-(v/v_c)^\beta]$ ^[7,8], 到高斯分布 $\exp[-(v/v_c)^2]$ ^[14] 均存在. 理论研究方面, van Noije 和 Ernst^[15] 于 1999 年解 Boltzmann-Enskog 方程得到在均匀加热体系中 $f(v) \propto \exp[-(v/v_c)^{3/2}]$, 在自由冷却体系 $f(v) \propto \exp[-(v/v_c)]$, 与实验结果明显不符, 之后的理论包括幂律分布^[16] 和所谓的超统计讨论^[17], 都没有直接与实验数据对应的速度分布的普适形式.

为了克服重力场对颗粒运动的影响, 以及颗粒团簇形成引起的不均匀分布, 中法合作在微重力环境下对稀薄颗粒体系进行速度监测, 在实践八号卫星实验中首次获得以振动为驱动的稀薄颗粒体系长时间(2 h)的运动速度分布数据, 得到的结果速度几率分布函数为非高斯分布, 分布函数较接近负 e 指数分布^[12]. 建立于此实验数据的基础上, 本文尝试给出这种非高斯形式的速度几率分布函数的闭式表达式,

引用格式: 厚美瑛, 李寅闯. 稀薄颗粒气体的运动速度几率分布函数. 科学通报, 2009, 54: 1483-1487

Hou M Y, Li Y C. Probability density function of granular-gas velocity distribution (in Chinese). Chinese Sci Bull (Chinese Ver), 2009, 54: 1483-1487, doi: 10.1360/972009-224

并且讨论其所对应的朗之万方程. 此表达式的存在, 对颗粒气体是否存在有限个宏观量来描述颗粒体系极可能给出肯定的答案.

1 非平衡态体系稳态涨落非高斯分布的朗之万方程模型

布朗运动气体分子对应的朗之万方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = [2\gamma k_B T]^{1/2} \xi(t), \quad (1)$$

其中 $\gamma(dx/dt)$ 为耗散项; $\xi(t)$ 为白噪声, $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 且 $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$, 涨落幅度由涨落耗散定理决定, 等于 $[2\gamma k_B T]^{1/2}$. 这样定义的随机变量 dx/dt 和 x 由中心极限定理可知应为高斯分布, x 分布的方差值遵循扩散定理: $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, 速度 dx/dt 分布的方差值遵循麦克斯韦-玻尔兹曼分布: $\langle (dx/dt)^2 \rangle = kT$.

然而在非平衡态体系中涨落分布往往是非高斯的, 例如在湍流实验研究中发现, 湍流温度涨落在瑞利数低 ($Ra \sim 10^{-8}$) 时为高斯分布, 高 ($Ra > 10^{-8}$) 时几率分布函数为接近负 e 指数的非高斯分布^[18,19]; 在物种演化^[20]、股票指数^[21] 的涨落数据中亦发现非高斯的 e 指数几率分布. 这种稳态涨落非高斯分布的发现曾激发了许多理论与实验研究的关注^[22-24]. Pope 和 Ching 等人^[23,25,26] 由(1)式出发, 但是将(1)式中的耗散与涨落系数与变化过程关联起来, γ 和 T 不再是常数, 而是参量的函数 $\gamma(x)$ 和 $T(x)$. 此时(1)式为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} = [2\gamma k_B T(x)]^{1/2} \xi(t). \quad (2)$$

他们推导出一个普适的稳态随机过程参量 $x(t)$ 的几率分布函数 $P(x)$:

$$P(x) = \frac{C}{q(x)} \exp \left[\int_0^x \frac{r(x')}{q(x')} dx' \right], \quad (3)$$

其中

$$r(x) = \frac{\langle \ddot{x} | x \rangle}{\langle \dot{x}^2 \rangle}, \quad q(x) = \frac{\langle \dot{x}^2 | x \rangle}{\langle \dot{x}^2 \rangle}. \quad (4)$$

(4)式中 $\langle \cdot | x \rangle$ 指的是只对参量涨落值 $x(t)$ 等于 x 时的所有值取平均.

(2)式的物理意义可以看成在势能为 $V(x)$ 和温度场为 $T(x)$ 中运动的质量为 m 的布朗粒子的运动方程. 当 $\gamma(x) \rightarrow \infty$ 时^[20,25],

$$\langle \ddot{x} | x \rangle = \frac{F(x)}{m}, \quad (5a)$$

$$\langle \dot{x}^2 | x \rangle = \frac{k_B T(x)}{m}, \quad (5b)$$

(5a)式中 $F(x) = -dV(x)/dx$.

若已知势能 $V(x)$ 和温度场 $T(x)$, 将其带入到(3)式的积分中, 就可以得到 x 的几率密度函数 $P(x)$. 由势能 $V(x)$ 和温度场 $T(x)$ 的函数形式决定, $P(x)$ 可能由高斯到超 e 指数分布 $e^{-c|x|^\beta}$, β 值介于 1 到 2 之间.

颗粒气体的近 e 指数非高斯速度分布是否与这些非平衡体系物理量的稳态随机涨落有共通之处? 我们利用卫星平台, 完成了微重力环境中的一维振动驱动的稀薄颗粒气体运动实验, 由得到的颗粒运动数据, 获取 $r(v)$ 和 $q(v)$, 其中

$$\langle \dot{v} | v \rangle = \Delta t^{-2} \langle [v(t+\Delta t) + v(t-\Delta t) - 2v(t)] | v \rangle, \quad (6a)$$

$$\langle \dot{v}^2 | v \rangle = \Delta t^{-2} \langle [v(t+\Delta t) - v(t)]^2 | v \rangle, \quad (6b)$$

Δt 取为实验的时间分辨率.

2 实验参数与结果

实验装置与实验细节可参考文献^[12]. 实验样品池尺寸 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 0.11 \text{ cm}$, 装有 4 个直径 1 mm 的青铜珠. 通过时间分辨率为 25 帧/s, 空间分辨率为 752×582 像素的摄像记录获得颗粒的运动轨迹. 图 1 为取自航天摄像记录的实验样品池颗粒运动快照中的一幅. 颗粒的运动由步进电机振动驱动. 实验共分 10 个驱动模式, 每个模式由一组不同的振动振幅和频率 (b, f) 控制, 振动速度为 $v_b = 2\pi f b$, 振动方向取为 y 方向, 垂直于振动的方向定为 x 方向. 每一个模式的周期 T 为 10 min (15000 帧) 和 20 min (30000 帧) 两种, 实验共持续 2 h. 振动速度的范围为 $3 \sim 14.5 \text{ mm/s}$. 颗粒运动特征速度约为 $2.6 \sim 10.5 \text{ mm/s}$. 实验选在 Knudsen 稀薄颗粒域, 亦即平均自由程应大等于容器尺寸, $l_e \sim L$, 以克服团簇的形成所引起的不均匀分布. 颗粒数目 N 选为 4 时, 满足 Knudsen 区域的条件 ($l_e = (L-d)^2 / [2d(N-1)] \approx 13.5 \text{ mm}$, $L(10 \text{ mm})$). 由于 y 方向为振动方向, 因此

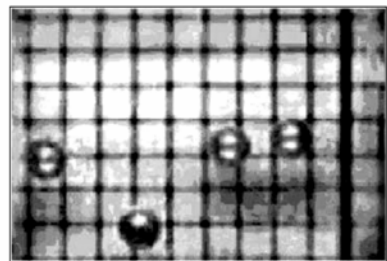


图 1 取自航天摄像记录的颗粒在实验样品池中的运动快照

我们选择无外力驱动的 x 方向的速度涨落为分析数据.

图 2 给出通过程序分辨颗粒中心位置所得出的模式 1 在 x 方向的颗粒位移变化, 由此得到横向速度 $v_x(t) = [x(t) - x(t - \Delta t)] / \Delta t$. 大部分时间里, 颗粒在容器的两个边壁间做直线运动, 在中间位置的转折点表明颗粒在此时与其他颗粒发生碰撞. 图 3 是由对轨迹曲线的微分得到的模式 1 中 x 方向的速率 $v_x(t)$ 分布.

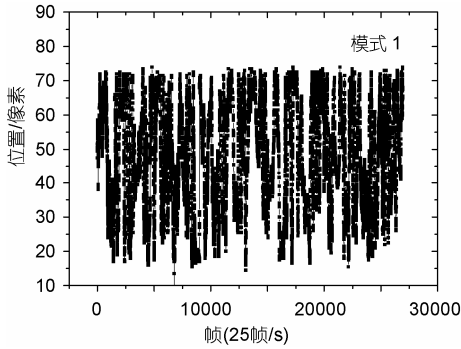


图 2 模式 1 的跟踪结果

某一个颗粒的 x 向位置随时间的变化

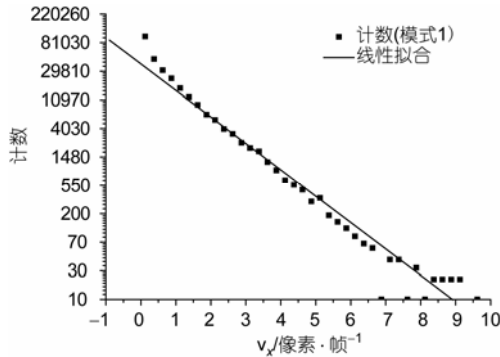


图 3 模式 1 中的 x 方向速率分布

可以发现 x 方向的速率分布 v_x 满足函数 $\exp(-vx/v_{x_0})$, 其中 v_{x_0} 是拟和参数, 为 v_x 在模式 1 时的特征速度. 在图 4 中可以发现这个值 v_{x_0} 线性正比于振动速度 v_b , 比值约为 0.40. 图 5 给出了 10 个模式归

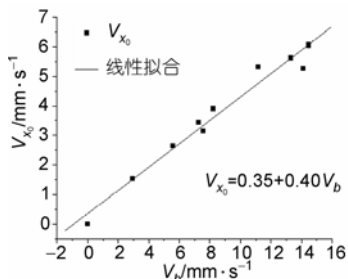


图 4 横向特征速度 v_{x_0} 随驱动速度 v_b 的变化

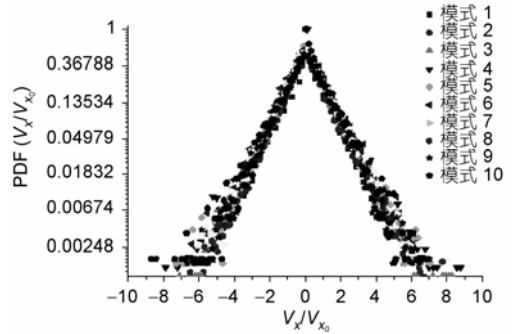


图 5 归一化的 x 方向几率密度函数

一化的几率密度函数, 速度遵从负指数分布.

3 对应的速度几率分布函数

(3)~(5)式可以适用的前提之一是过阻尼极限成立, 亦即 $\gamma \rightarrow \infty$, 因此我们首先对图 4 的数据求其时间关联函数 $C(\tau) = \langle v(t+\tau)v(t) \rangle$. 以模式 1 为例, 模式 1 共有约 27000 个数据, 数据点的时间间隔 Δt 为 0.04 s, 颗粒速度的时间关联函数 $C(\tau) = \langle v(t+\tau)v(t) \rangle$ 在图 6 中给出. 可以看出关联长度大约等于 L/v_{y_0} , 在 τ 约为 3~4 s 时趋近于零, 衰减很快. $\tau \propto 1/\gamma$, 因此 τ 很小表示过阻尼极限成立, (3)~(5)式可以适用.

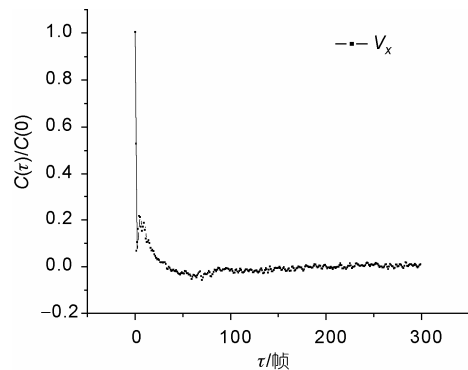


图 6 模式 1 的 x 方向每帧速度的归一化关联函数值

由(6)式对模式 1 数据取速度对时间一阶和二阶导数对应于某个 v 值的平均值, 可以得到 $r(v)$ 和 $q(v)$ 的函数曲线, 如图 7 和 8 所示. 可以看出 $r(v)$ 是一个 v 的线性函数, 很好地符合了最简单形式的涨落耗散假设 $r(v) = -Rv$ ^[22], 拟和值 $R = 1.5$. $q(v)$ 以 $q(v) = Q(v^2 + a^2)^{1/2}$ 拟和^[15], 拟和值 $Q = 1.42$, $a = 0.28$. $q(v)$ 在低速部分拟和得很好. 高速部分拟和较差, 可能是由于大部分的数据在低速部分(见图 3), 高速部分为小概率事件, 因此 $r(v)$ 和 $q(v)$ 曲线高速部分的涨落较大. 在取了所有 10 个模式的数据的统计值后, 高速部分的涨落明显

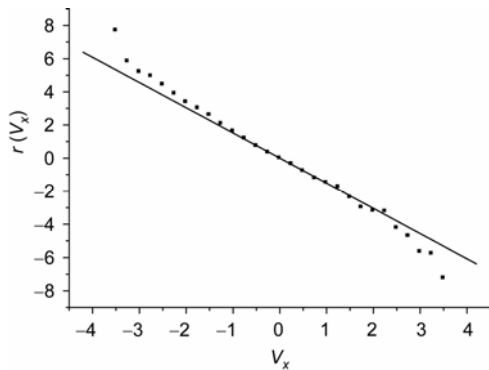


图7 模式1中 v_x 数据的 $r(v_x)$ 函数曲线
实线为线性拟和的结果

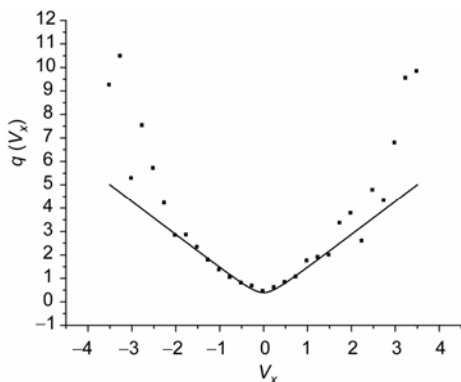


图8 模式1中 v_x 数据的 $q(v_x)$ 函数曲线
实线为 $q(v)=Q(v^2+a^2)^{1/2}$ 拟和的结果

变小, $r(v)$ 和 $q(v)$ 曲线符合得更好. 此部分将另文作进一步讨论.

将 $r(v)$ 和 $q(v)$ 带入(3)式几率密度分布函数有如下的解析形式:

$$P(v) = \frac{C'}{(v^2 + (0.28)^2)^{1/2}} \exp[-1.1(v^2 + (0.28)^2)^{1/2}]. \quad (7)$$

因为 $a \ll v_{x_0}$, 因此 $P(v)$ 可以近似为速度的负 e 指数分布. 将(7)式的函数值带入拟和模式1的速度分布曲线, 两者很好地重叠(图9).

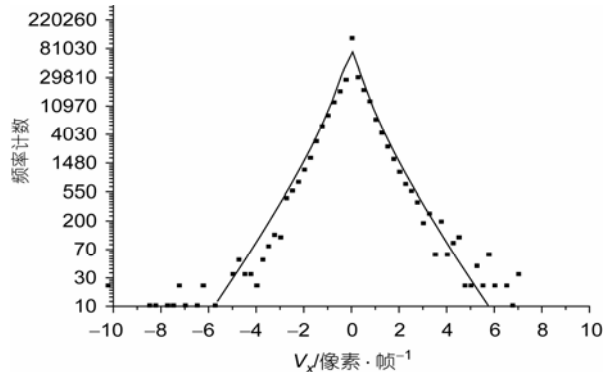


图9 模式1中 v_x 数据的几率分布
实线为以(7)式拟和的曲线

4 结论

以上结果显示, 颗粒运动速度的分布可以由噪声幅度可变的朗之万方程产生. 建立在 $r(v) \propto -v$ 涨落耗散基础上, 颗粒体系速度涨落的非高斯分布可能存在简单的普适规律: (3)~(5)式模型适用于颗粒体系的稳态涨落分布. 不同的实验体系中等效势能 $V(x)$ 和温度场 $T(x)$ 不同, $q(v)$ 中的 a 值不同, 当 a 值大时, $q(v)$ 对 v 的依赖可忽略($q(v)=$ 常数), $P(v)$ 为高斯分布; 当 a 值小时, $q(v) \sim v$, $P(v)$ 为 e 指数分布. 更进一步的实验分析仍在进行中.

参考文献

- 1 张化, 王琪, 缪国庆. 具有周期结构的垂直激励系统中颗粒物质隆起的形成和输运. 科学通报, 2007, 52: 2107—2110
- 2 史庆藩, 阎学群, 厚美瑛, 等. 振动混合颗粒形成的反巴西果分层及其相图的实验观测. 科学通报, 2003, 48: 328—330
- 3 厚美瑛. 沙子里的图案. 物理, 2008, 37: 93—97
- 4 Olafsen J S, Urbach J S. Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer. Phys Rev Lett, 1998, 81: 4369—4372[doi]
- 5 Olafsen J S, Urbach J S. Velocity distributions and density fluctuations in a granular gas. Phys Rev E, 1999, 60: 2468—2471[doi]
- 6 Prevost A, Egolf D A, Urbach J S. Forcing and velocity correlations in a vibrated granular monolayer. Phys Rev Lett, 2002, 89: 084301[doi]
- 7 Losert W, Cooper D G W, Delour J, et al. Velocity statistics in excited granular media. Chaos, 1999, 9: 682—690[doi]
- 8 Rouyer F, Menon N. Velocity fluctuations in a homogeneous 2D granular gas in steady state. Phys Rev Lett, 2000, 85: 3676—3679[doi]
- 9 Liu R, Li Y C, Hou M Y, et al. van der Waals-like phase-separation instability of a driven granular gas in three dimensions. Phys Rev E, 2007, 75: 061304[doi]
- 10 Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P. Granular solids, liquids, and gases. Rev Mod Phys, 1996, 68: 1259—1273[doi]
- 11 Kadanoff L P. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. Rev Mod Phys, 1999, 71: 435—444[doi]

- 12 Hou M, Liu R, Zhai G, et al. Velocity distribution of vibration-driven granular gas in Knudsen regime in microgravity. *Microgr Sci Tech*, 2008, 20: 73—80
- 13 Falcon E, Aumaitre S, Evesque P, et al. Collision statistics in a dilute granular gas fluidized by vibrations in low gravity. *Europhys Lett*, 2006, 74: 830—836[[doi](#)]
- 14 Baxter G W, Olafsen J S. Gaussian statistics in granular gases. *Nature*, 2003, 424: 635
- 15 van Noije T P C, Ernst M H. Velocity distributions in homogeneous granular fluids: The free and the heated case. *Granular Matter*, 1999, 1: 57—64[[doi](#)]
- 16 Ben-Naim E, Machta J. Stationary states and energy cascades in inelastic gases. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 138001
- 17 Beck C. Stretched exponentials from superstatistics. *Physica A*, 2006, 365: 96—101
- 18 Heslot F, Castaing B, Libchaber A. Transitions to turbulence in helium gas. *Phys Rev A*, 1987, 36: 5870—5873[[doi](#)]
- 19 Sano M, Wu X Z, Libchaber A. Turbulence in helium-gas free convection. *Phys Rev A*, 1989, 40: 6421—6430[[doi](#)]
- 20 Ao P. Emerging of stochastic dynamical equalities and steady state thermodynamics from Darwinian dynamics. *Commun Theor Phys*, 2008, 49: 1073—1090[[doi](#)]
- 21 Tang L H. Langevin modeling of high-frequency Hang-Seng index data. *Physica A*, 2003, 324: 272—277[[doi](#)]
- 22 Sinai Y G, Yakhot V. Limiting probability distributions of a passive scalar in a random velocity field. *Phys Rev Lett*, 1989, 63: 1962—1964[[doi](#)]
- 23 Pope S B, Ching E S C. Stationary probability density functions: an exact result. *Phys Fluids A*, 1993, 5: 1529—1531[[doi](#)]
- 24 Ching E S C. Probability densities of turbulent temperature fluctuations. *Phys Rev Lett*, 1993, 70: 283—286[[doi](#)]
- 25 Ching E S C. General formula for stationary or statistically homogeneous probability density functions. *Phys Rev E*, 1996, 53: 5899—5903[[doi](#)]
- 26 Stolovitzky G, Ching E S C. Characterization of stationary distributions using conditional expectations. *Phys Lett A*, 1999, 255: 11—16[[doi](#)]

Probability density function of granular-gas velocity distribution

HOU MeiYing & LI YinChang

Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Velocity distribution of a quasi-2D dissipative granular gas in the limit of Knudsen regime is obtained experimentally in microgravity condition. The distribution is found to follow an exponential function, which deviates strongly from the Boltzmann distribution as in the molecular gas. A close form expression of the probability density function $P(v)$ of the velocity distribution, derived from a modified Langevin equation, is found to fit the experimental data. Depending on the value of the fitting parameter a in the function $q(v)=Q(v^2+a^2)^{1/2}$, the function $P(v)$ can be a function from Gaussian when a is large compared with v , to exponential distribution when a is much smaller than v . This close form function may give a generic expression to the granular gas velocity distribution in different experimental conditions.

granular matter, velocity distribution, Langevin equation

doi: 10.1360/972009-224