振动驱动颗粒气体体系的局域态本构关系的实验验证*

陈延佩[1)2)] Pierre Evesque[2)] 厚美瑛[1)†]

1) (中科院物理研究所, 北京凝聚态物理国家重点实验室, 北京 100190)

2) (Lab MSSMat, Ecole Centrale Paris, UMR 8579 CNRS, Chatenay-Malabry Cedex 92295, France)

(2013年4月12日收到; 2013年5月17日收到修改稿)

对准二维、水平边界振动驱动的颗粒气体体系的流体力学参量进行了局域态本构关系的实验研究. 实验观测结果与经典动力学理论预测进行了比较. 由于颗粒气体空间分布的不均匀性, 颗粒体系的整体本构关系不成立, 有必要对局域态进行分析. 局域态本构关系是指颗粒系统的局域温度、局域压强和局域数密度之间的关系. 通过颗粒速度的方向变化, 可以得到颗粒的碰撞点. 因此在计算压力张量的对角线项时, 除了动力学部分之外, 我们计入了颗粒碰撞的影响, 得到了一个约为常数的压力张量迹, 即颗粒压强的空间分布, 与流体力学理论预测以及分子动力学模拟结果相符合; 但是颗粒温度和数密度的空间分布, 在振动的正反两个方向的分量出现差异, 并且温度、压强和数密度之间的局域本构关系, 无论在低密度或高密度区域, 实验与理论预测在定性上一致, 但定量上都有较大差别. 因此经典流体力学理论在描述这样的体系时需加以修正.

关键词: 颗粒气体, 态方程, 流体力学

PACS: 45.70.−n, 51.30.+i, 51.10.+y **DOI:** 10.7498/aps.62.164503

1 引 言

颗粒物质是一种离散的能量耗散体系, 因此为了维持颗粒体系的稳态分布, 需要不断输入能量以平衡颗粒非弹性碰撞带来的能量耗散. 在实验中, 通常通过边界的振动来向颗粒系统源源不断地输入能量, 其中，高度流化的颗粒体系也称为颗粒气体. 颗粒气体体系有很多不同于经典分子气体的特性, 例如非高斯的速度分布 [1,2] 以及非对称的局域速度分布 [3,4] 等.

虽然仍存在很大的争议, 现今经典的玻尔兹曼方程 [5] 以及流体力学理论 [6] 仍被普遍用于颗粒气体体系的描述. 其中, Grossman 等 [7] 模拟了二维边界热驱动下颗粒系统的近平衡稳态行为, 给出了对于极高和极低密度极限条件下流体力学处理方法, 并且研究了远离平衡态的态方程. 而 Brey 等 [3,8] 的 Monte Carlo 模拟结果则得到压强的空间分布，空间分布不为常数, 有违动量守恒. 文献 [9, 10] 利用 Boltzmann-Enskog 方程在颗粒系统的压强中引入了碰撞的影响, 修正了这一问题. Herbst 等 [11] 通过事件驱动的分子动力学模拟统计了碰撞对于压强的影响, 证实了加入碰撞项之后, 压强在振动方向的分量为常数, 且进一步测量了局域流体力学参量的空间分布, 给出了颗粒的气体局域的温度、压强和密度的本构关系. 至今只有模拟的结果, 仍然没有相关的实验报道来支持这样的局域本构方程的成立性.

本文主要从实验的角度测量了在准二维近水平振动颗粒物质的局域流体力学参量, 例如压力张量、密度以及温度的空间分布. 计算压力张量的对角线项时, 除了动力学部分之外, 也采用一定的计算分析, 计入了颗粒碰撞的影响, 得到的压力张量迹 (即颗粒的压强) 的空间分布为常数, 符合流体力

* 国家自然科学基金 (批准号: 1104010) 和地震行业科研经费 (批准号: 201208011) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

学理论预测, 与之前的分子动力学模拟结果 [10] 相符合; 但是颗粒温度和数密度在振动的正反两个方向的分量出现差异, 并且温度、压强和数密度之间的局域本构关系, 无论在低密度或高密度区域, 实验结果与理论预测都有较大差别, 表明经典流体力学理论在描述这样的体系时需进一步加以修正.

2 实验装置和模型

2.1 实验模型

实验系统是由振动系统、高速摄像系统以及样品池组成. 将振动台 (LDS V455) 放置在一个旋转台上 (可 180° 旋转), 在本文中, 振动是近水平的 (误差小于 2°). 颗粒样品是 3 mm 的铜珠. 颗粒样品池是一个大小长为 70 mm, 宽为 50 mm, 高为 10 mm 的长方形盒子, 盒子的侧面由铝制成, 盒子的上下面是由玻璃板组成. 其中盒子的深度可根据颗粒的直径, 放置玻璃板来调节, 以便维持颗粒的准二维振动. 例如在本此实验中, 颗粒的直径为 3 mm, 故将高调节为 4 mm. 玻璃板下面有平铺的 LED 灯以便增加颗粒与背景的反差, 上面垂直放置一个高速摄像机 (Nikon MotionBLITZ cube4) 来记录颗粒的所有运动. 高速摄像机每秒钟最大可以记录 2 G 的数据, 最大每秒可记录 1100 帧图像. 图 1 展示了一张实验快照, 其中盒子的像素约为 880 pixel × 650 pixel, 因此精度为 0.07 mm/pixel. 整个实验不考虑颗粒的旋转.

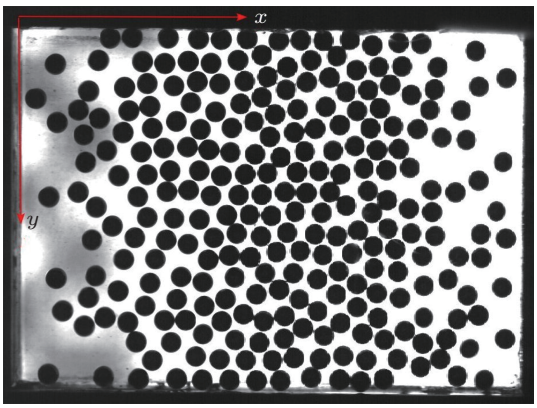

图 1 高速摄像机记录的一张快照 (颗粒为 3 mm 的铜珠, 数目为 256 个, 振动方向为 x 方向)

2.2 实验数据处理

实验中, 每帧图像中的各个颗粒的中心位置通过图像识别的程序获得, 而帧与帧之间颗粒的跟踪则根据最小位移算法获得. 下面重点介绍如何判断颗粒碰撞的发生. 我们采用文献 [12] 中的方法: 1) 颗粒的速度通过颗粒位置的有限差分 $\boldsymbol{v}_j = \Delta\boldsymbol{x}/\Delta t$ 获得, 这里 $\Delta\boldsymbol{x} = x(t_j) - x(t_i)$ 代表同一个颗粒在相邻两帧的位置差, Δt 是相邻两帧之间的时间间隔; 2) 由于在发生碰撞时, 颗粒的速度方向会发生变化, 速度方向由 $\psi = \cos^{-1}(\widehat{\boldsymbol{v}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}_j)$ 计算得出, 其中 $\widehat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是所计算速度的单位矢量. 当 $20° \leqslant \psi \leqslant 180°$ 时, 认为该颗粒在这帧发生了一次碰撞. 由于我们的计算并没有涉及碰撞颗粒对, 因此不需要判断颗粒的周围是否出现另外一个碰撞的颗粒. 对于 $\psi \leqslant 20°$ 的情况, 当计算所得的相邻两帧的速度的绝对值改变, $|\Delta\boldsymbol{v}|/|\boldsymbol{v}| \geqslant 0.2$ 时, 也判定该颗粒发生了一次碰撞. 这样就能获得有哪些颗粒发生了碰撞, 并进一步统计颗粒碰撞前后动量的变化. 这里统计碰撞时, 不计入颗粒与边界的碰撞, 只统计颗粒与颗粒的碰撞, 这里指靠近边界处宽为一个颗粒直径大小范围的碰撞.

3 实验观察结果与讨论

为了观察颗粒系统的局域态 [11], 将盒子沿着振动方向 (70 mm) 分成 15 个小仓 (面积为 V_{r}), 统计出现在各个小仓中的颗粒的行为, 这种方法也叫做粗粒化. 粗粒化能将微观与介观联系起来, 以便运用宏观流体力学的分析方法. 下面重点分析颗粒的局域行为.

首先给出颗粒局域态参量的基本定义. 其中, 颗粒系统速度场的定义为

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\rho(r)} \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_x \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_y f_{\mathrm{stat}}(r, v_x, v_y)\boldsymbol{v}, \quad (1)$$

其中 $f_{\mathrm{stat}}(r, v_x, v_y)$ 是速度分布函数, $\rho(r)$ 是数密度函数, $\boldsymbol{v}$ 为速度, 积分区域 $\mathfrak{R}$ 为所在的小仓. 在稳态的情况下, 颗粒的平均速度场为 0, 即 $U(\boldsymbol{r}) = 0$. 颗粒的温度定义为

$$T_i(r) = \frac{m}{\rho(r)} \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_x \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_y f_{\mathrm{stat}}(r, v_x, v_y)(v_i - U_i(r))^2, \quad (2)$$

其中, $i = x, y$, m 为单个颗粒的质量, 这里都设为 1; 总的颗粒总的温度为 $T(r) = [T_x(r) + T_y(r)]/2$.

颗粒系统的局域的密度为

$$\rho(r) = \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_x \int_{\mathfrak{R}} \mathrm{d}v_y f_{\mathrm{stat}}(r, v_x, v_y). \quad (3)$$

系统的面积分数为 $\phi = N\pi d^2/(4L_xL_y)$, 其中 N 为颗粒的数目, d 为颗粒的直径, L_x 为盒子的 x 方

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

向的长度, L_y 为盒子 y 方向的长度. 我们采用文献 [11, 13] 中的颗粒系统的压力张量计算方法. 压力张量由两部分构成: 一部分是由颗粒的运动造成, 另外一部分是颗粒的碰撞引起的. 表达式为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{kin}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r},t)$, 其中动能部分为

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{kin}}(\boldsymbol{r})=-m\int_{\Re}\mathrm{d}v_x\int_{\Re}\mathrm{d}v_y f_{\mathrm{stat}}(\boldsymbol{r},v_x,v_y)\times[v_i-U_i(r)][v_j-U_j(r)]. \tag{4}$$

碰撞部分的压力张量为

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{int}}(r,t)=\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|V_r|}\sum_{t_n}\sum_{t_n}l_i^{k_n}(t_n)\Delta p_j^{k_n}(t_n). \tag{5}$$

假设在 t_n 时刻, 颗粒 k 发生了碰撞, 那么 $l_i^{k_n}$ 是从颗粒 k 的中心指向碰撞点的长度为 $a/2$ 的矢量的 i 方向的分量 (a 为颗粒的直径). $\Delta p_j^{k_n}$ 是颗粒 k 在碰撞过程中动量损失的 j 方向分量. Δt 是时间间隔, 这里使用相邻两帧的时间间隔. 然后再进行时间的积分并求平均值, 故压力张量的碰撞的部分:

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{int}}(r)=\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\mathrm{d}t\sigma_{ij}^{\mathrm{int}}(r,t), \tag{6}$$

即统计相邻两帧时间间隔内发生的全部碰撞.

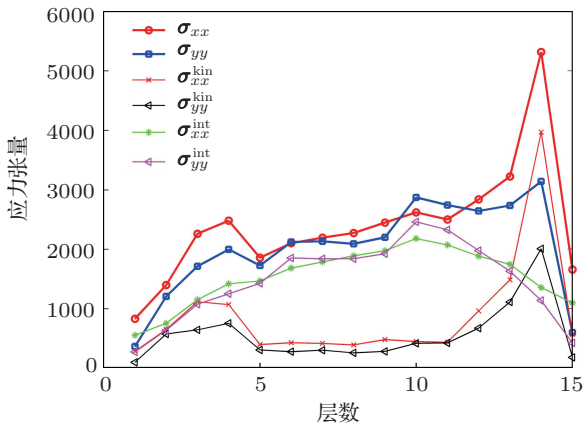

图 2 压力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}, \boldsymbol{\sigma}_{yy}, \boldsymbol{\sigma}_{xx}^{\mathrm{kin}}, \boldsymbol{\sigma}_{yy}^{\mathrm{kin}}, \boldsymbol{\sigma}_{xx}^{\mathrm{int}}, \boldsymbol{\sigma}_{yy}^{\mathrm{int}}$ 的空间分布 其中颗粒为 256 个铜珠 (3 mm), 样品池为 70 mm × 50 mm, 因此面积分数 $\phi=0.517$; 振动参数为频率 50 Hz, 加速度为 110 m/s^2; 每秒是 1000 fps (frame per second); 共统计了 4000 帧的数据, 即 100 万个速度

图 2 展示了我们通过实验数据分析得到的一组颗粒的压力张量以及各个分量的空间分布. 在图中可以发现, 从盒子的边缘向中心移动时, 局域压力张量的动力学部分 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}^{\mathrm{kin}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{yy}^{\mathrm{kin}}$ 是逐步减少的, 而压力张量的碰撞项部分 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}^{\mathrm{int}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{yy}^{\mathrm{int}}$ 是逐步增加的, 这样就会导致总的压力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{yy}$ 趋于一个常数. 从这点上看, 我们的实验结果与模拟结果以及理论预测是符合的, 即在没有宏观流场的情况下, 颗粒的压强应为常数. 在之前的模拟结果 [11] 中, 振动方向 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 是常数, 而 $\boldsymbol{\sigma}_{yy}$ 的振动方向的梯度却不为 0. 而本文的实验结果 (图 1) 却显示 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{yy}$ 差别并不是很明显. 这可能与实验的条件有关系, 实验中可能引入颗粒与底板的摩擦.

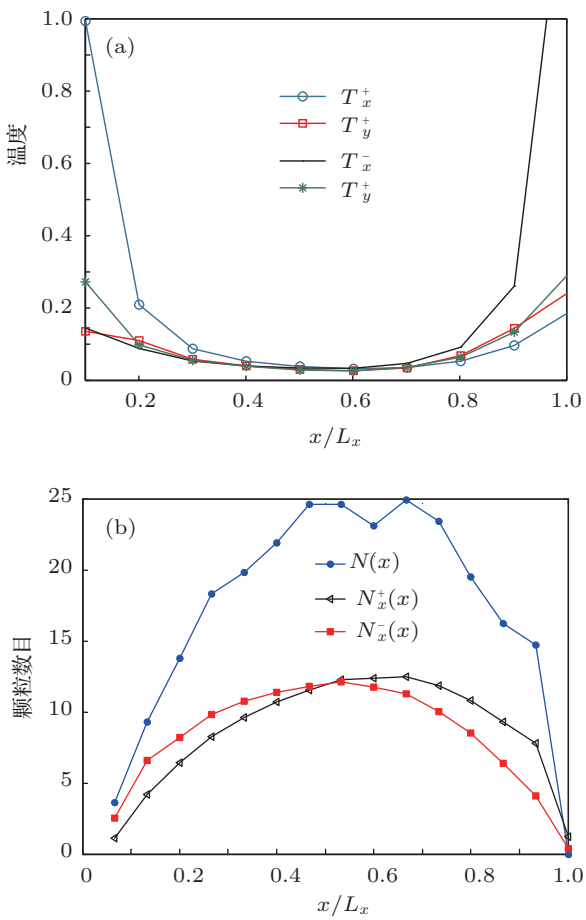

图 3 颗粒温度以及颗粒数目的空间分布 (a) 标度的温度的各个分量 T_x^+, T_x^-, T_y^+ 和 T_y^- (温度标度是除以 v_ω^2); (b) 颗粒数目的空间分布; 其中颗粒为 256 个铜珠 (3 mm), 样品池为 70 mm × 50 mm, 因此面积分数 $\phi=0.517$; 振动参数为频率50 Hz, 加速度为 110 m/s^2; 每秒是 1000 fps; 共统计了 4000 帧的数据, 即 100 万个速度

下面讨论温度和颗粒数目的空间分布. 这里温度同 (2) 式, 为颗粒运动速度的涨落. 进一步将温度的 x 和 y 分量按照其正负的符号分成两部分, 例如 $T_x^+=\langle(v_x^+-\bar{v}_x)^2\rangle$, $\bar{v}_x$ 是局域的平均速度, v_x^+ 是指速度 v_x 大于零的部分, T_x^- 定义类似. 颗粒的数目分布也按照 v_x 的正负分成两个部分, 分别为 N_x^+ 和 N_x^-. 与在微重力实验 [4] 中所观察到的相似, 如图 3(a) 所示, 颗粒在振动方向的温度的两个分量 T_x^+ 和 T_x^- 是不相等的, 这就意味着即便在二维稳态的边界振动驱动的颗粒气体中能均分定理也不成立. 同样, 也发现局域颗粒数目的两个分量 N_x^+ 和 N_x^- 也不相

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

等 (如图 3(b) 所示).

对于以上所测流体力学参量, 我们希望建立各个参量之间的关系, 亦即本构关系. 对于理想气体而言, $p(x)=\rho(x)T(x)$. 而对于颗粒气体而言, 由于压强经过碰撞项的修正, 这个公式显然是不成立的. 由文献 [4, 7, 11], 我们引入函数 $G(\phi(x))$ 来表示各个参量之间的关系, 即

$$\frac{p(x)}{\rho(x)T(x)}=G(\phi(x)), \tag{7}$$

其中颗粒的面积分数为 $\phi=N\pi d^2/(4L_xL_y)$. 对于理想气体而言, 显然 $G(\phi(x))=1$. 由文献 [4, 7, 11], $G(\phi(x))$ 的表达式为

$$G(\phi)=1+(1+\alpha)\phi\chi, \tag{8}$$

其中 α 是恢复系数, χ 是接触弹性硬球在热平衡态下的对相关函数. 在文献 [11] 中, 利用 Henderson 近似:

$$\chi\simeq\frac{1-7\phi/16}{(1-\phi)^2}, \tag{9}$$

$$G(\phi)=1+(1+\alpha)\phi\frac{1-7\phi/16}{(1-\phi)^2}. \tag{10}$$

图 4 给出了一组实验结果以及 (10) 式的结果. 从图中可以看出 $G(\phi(x))$ 与系统总的面积分数 ϕ_0 没有明显的关系, 而只与局域的面积分数有关. 在不同的面积分数 ϕ_0 下, 都满足相同的规律. 文献 [11] 的模拟结果显示, 在局域面积分数 $\phi(x)\leqslant 0.5$ 的情况下, (10) 式偏差并不大, 理论预测曲线与模拟结果基本完全重合. 但是从本文的实验结果来看, 实验结果与理论结果在定性上一致, 但是定量上与理论的预测值偏差较大, 理论预测的 G 值普遍比实验结果偏小. 这说明在本文实验中, 压力张量的碰撞部分大于理论预测值, 导致 $G(\phi(x))$ 较大. 我们推测可能的原因有: 1) 统计误差, 图像处理算法造成计算误差 (颗粒的中心位置计算偏差导致颗粒速度变化); 2) 理论计算问题, (10) 式的推导是基于弹性硬盘, 由于理论是基于平衡态假设以及弹性假设, 显然我们的实验系统并不满足这些假设, 所以偏差较大是可理解的; 3) 由于实验是准二维实验, 除了水平运动之外, 还有旋转, 这些我们都没有考虑; 4) 颗粒与底板的摩擦.

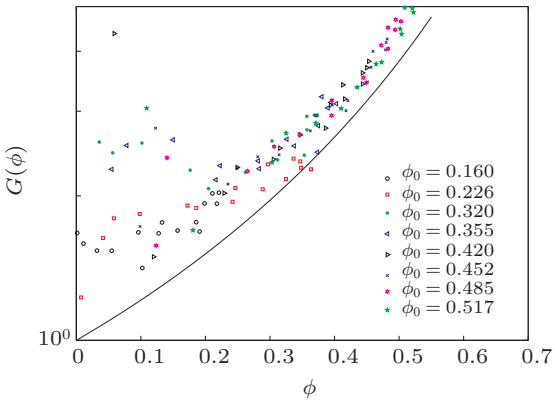

图 4 不同的面积分数下, 函数 $G(\phi(x))$ 的半对数图 每组的样品池大小 (70 mm × 50 mm) 不变, 颗粒数目逐步变化, N 从 80 到 256, 即面积分数从 0.16 到 0.517, 并且也展示了理论; (10) 式预测值; 振动参数为频率 60 Hz, 加速度为 130 m/s^2, 500 fps (10) 式中恢复系数取值 0.8

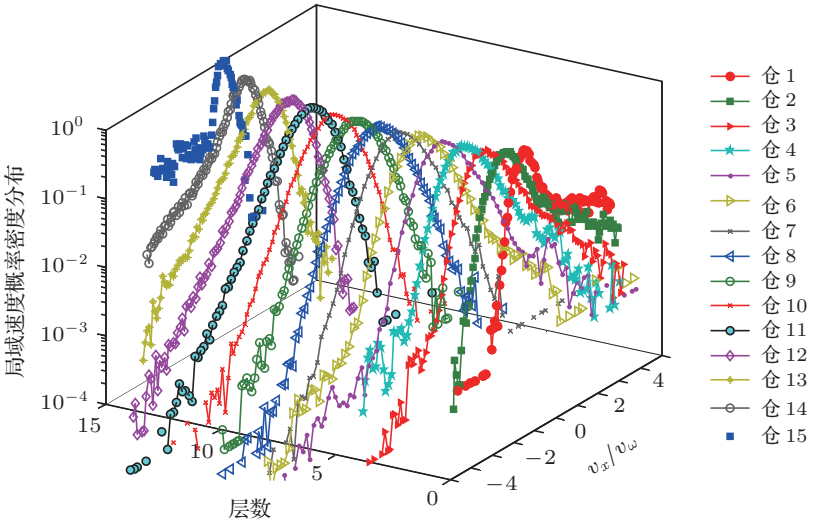

图 5 颗粒的局域速度分布 其中颗粒为 256 个铜珠 (3 mm), 样品池为 70 mm × 50 mm, 因此面积分数 $\phi=0.517$; 振动参数为频率 50 Hz, 加速度为 110 m/s^2; 每秒是 1000 fps; 共统计了 4000 帧的数据, 即 1000000 个速度

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

另外也发现 (10) 式中恢复系数的影响是非常小的. 我们将公式中的恢复系数从 0.6 变化到 0.9, 给出的图像基本不变, 这与模拟结果 [11] 一致.

不能够只统计盒子中心区域的原因如下. 在边界区域, 由于边界的振动, 导致边界区域的面积分数比较小, 而且这个区域的颗粒运动速度比较大. 这也是文献 [11] 没有统计这部分区域的原因. 但是, 这种统计方法并不是合理的, 理由是基于我们对于局域速度分布的观察. 在文献 [11] 中, 我们发现靠近边界处的局域速度分布出现了双峰结构, 速度分布有偏斜. 在本文实验中也发现了类似的现象, 如图 5 所示. 远离边界, 这种边界效应会减小. 但是需要强调的是, 这种局域速度分布的偏斜是存在于整个盒子中的, 除了位于盒子的中心小仓的速度分布为对称分布外, 其余的小仓都是不对称的速度分布. 如果只统计中心区域, 忽略边界, 就会忽略颗粒气体的耗散本质. 当然只统计盒子的中心区域, 会减弱这种效应的影响, 也会更接近弹性情况. 这些都说明, 局域态方程理论与实验结果差别较大的原因是系统已经远远偏离了局域平衡态假设.

4 结 论

本文首次实验观测了颗粒气体的局域态本构关系. 计算了完整压力张量的迹, 即除了动力学部分之外, 还计算了颗粒之间碰撞对压力张量的影响. 并将实验结果与分子动力学模拟及理论预测结果相比较. 发现实验中完整的压力张量的对角项是一个常数, 使其满足流体力学方程中的动量守恒方程，然而与文献 [11] 模拟结果与理论完全重合不同, 实验测得的局域本构关系分布都与理论结果在定性上一致, 定量上有较大偏差. 这说明适用于颗粒气体体系的经典流体动力学理论仍有待于进一步的改进与修正.

[1] Olafsen J S, Urbach J S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4369

[2] Losert W, Cooper D G W, Delour J, Kudrolli A, Gollub J P 1999 *Chaos* **9** 682

[3] Brey J J, Ruiz-Montero M J, Moreno F 2000 *Phys. Rev.* E **62** 5339

[4] Chen Y, Evesque P, Hou M 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 074501

[5] Noije van T P C, Ernst M H 1998 *Granular Matter* **1** 57

[6] Haff P K 1983 *J. Fluid Mech.* **134** 401

[7] Grossman E L, Zhou T, BenNaim E 1997 *Phys. Rev.* E **55** 4200

[8] Brey J J, Cubero D 1998 *Phys. Rev.* E **57** 2019

[9] Barrat A, Trizac E 2002 *Phys. Rev.* E **66** 051303

[10] Jenkins J T, Savage S B 1983 *J. Fluid Mech.* **130** 187

[11] Herbst O, Muller P, Otto M, Zippelius A 2004 *Phys. Rev.* E **70** 051313

[12] Blair D L, Kudrolli A 2003 *Phys. Rev.* E **67** 041301

[13] Glasser B J, Goldhirsch I 2001 *Phys. Fluids* **13** 407

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Experimental study on the local equation of state for vibrated granular gases*

Chen Yan-Pei[1)2)] Pierre Evesque[2)] Hou Mei-Ying[1)†]

1) (*Key Laboratory of Soft Matter Physics, Beijing National Laboratory for Condense Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190*, China*)

2) (*Laboratory MSSMat, Ecole Centrale Paris, UMR 8579 CNRS, Chatenay-Malabry Cedex* 92295*, France*)

(Received 12 April 2013; revised manuscript received 17 May 2013)

Abstract

We experimentally measure the local equation of state for two-dimensional horizontal fluidize granular gases confined in a rectangle box. Local equation of state can be seen as a local constitutive equation of temperature, pressure and the number density. Except the kinetic parts, the collision parts of the stress tensor are included. The diagonal components of the stress tensor are almost constant, which is consistent with the results from the simulation and hydrodynamic theory. Furthermore, the spacial profiles of the temperature and the number density are shown to be consistent with the experimental results of micro-gravity. Finally the local equations of state for different area fractions are found to have great discrepancies with the theoretical predictions no matter how the low or dense the density is.

Keywords: granular gases, local equation of state, hydrodynamics

PACS: 45.70.−n, 51.30.+i, 51.10.+y **DOI:** 10.7498/aps.62.164503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 1104010) and the Special Fund for Earthquake Research of China (Grant No. 201208011).

† Corresponding author. E-mail: mayhou@aphy.iphy.ac.cn

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net